Cálculo I	**Lista numero 20**
Espaço e dimensão	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**

alun@:

22 de outubro de 2018	**Univ. Est Vale do Acaraú**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Espaço e dimensão*
objetivo: *compreender dimensão, dependência linear*
palavras chave: *dimensão, espaço, vetores.*

1. *soma de vetores, resultante*

   São dados dois vetores $\vec{A}, \vec{B}$ de mesmo módulo k.

   (2) (V)[ ](F)[ ] *$\vec{A}, \vec{B}$ se encontram dentro da mesma esfera de raio k.*

   (3) (V)[ ](F)[ ] *É possível que $\vec{A}$ esteja dentro da esfera de rio k e $\vec{B}$ esteja na esfera de raio $2k$.*

   (5) (V)[ ](F)[ ] *Se somados $\vec{A}, \vec{B}$ pela regra do polígono se tiver uma resultante nula então $\vec{A}, \vec{B}$ são perpendiculares.*

   (7) (V)[ ](F)[ ] *Se somados $\vec{A}, \vec{B}$ pela regra do polígono se tiver uma resultante nula então $\vec{A}, \vec{B}$ são colineares.*

   (11) (V)[ ](F)[ ] *Supondo que $\vec{A}, \vec{B}$ não tenham mesmo módulo mas sejam colineares, então existe um número real λ tal que $\vec{A} + \lambda\vec{B} = 0$*

   gabarito:

2. *soma de vetores, dependência linear*

   São dados dois vetores $\vec{A}, \vec{B}$, não nulos, e de módulos diferentes.

   (2) (V)[ ](F)[ ] *Se a resultante na soma dos vetores $\vec{A}, \lambda\vec{B}$ for nula, para algum escalar λ então $\vec{A}, \vec{B}$ são colineares, ou ainda ditos* linearmente dependentes.

   (3) (V)[ ](F)[ ] *Se $\vec{A}, \vec{B}$ não forem colineares então não será possível que $\vec{A}+\lambda\vec{B} = 0$ para algum escalar λ e neste caso $\vec{A}, \lambda\vec{B}$ se diz serem* linearmente independentes.

   (5) (V)[ ](F)[ ] *Se os vetores $\vec{A}, \vec{B}$ não forem colineares então existe um terceiro vetor $\vec{C}$ e escalares α, β tal que a resultante $\vec{A} + \alpha\vec{B} + \beta\vec{C} = 0$. Isto ainda quer dizer que podemos alterar a escala dos vetores $\vec{B}, \vec{C}$ de modo que somados pela regra do polígono, $\vec{A}, \alpha\vec{B}, \beta\vec{C}$ produzam um triângulo.*

   (7) (V)[ ](F)[ ] *Três vetores no plano sempre podem ser rescalados de modo somados pela regra do polígono resultem num triângulo.*

   (11) (V)[ ](F)[ ] *Dados três vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ no plano, existem escalares α, β, γ tal que $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} = 0$ e eles são ditos* linearmente dependentes.

   gabarito:

3. *soma de vetores, dependência linear*

   Dados três vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ de módulos diferentes que quando somados pela regra do polígono têm resultante zero.

   (2) (V)[ ](F)[ ] *Os vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ são coplanares ou ainda ditos* linearmente dependentes.

   (3) (V)[ ](F)[ ] *Os vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ somados pela regra do polígono, formam um triângulo, portanto são coplanares.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *As afirmações*

- *Os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *somados pela regra do polígono, formam um triângulo, portanto são coplanares.*
- *Os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *são linearmente dependdentes.*
- *Os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *determinam um plano.*
- *Os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *determinam um espaço de dimensão dois o que usualmente se chama de plano.*

são equivalentes e servem como definição para espaço de dimensão dois.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *tiverem todos o mesmo módulo* k *e se*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{1}$$

isto quer dizer que não é possível reescalar os vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *de modo que a soma dos mesmo pela regra do polígono tenha resultante zero e assim eles não podem formar um triângulo quando reescalados.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *tiverem todos o mesmo módulo* k *e se*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = 0 \tag{2}$$

então os vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ *determinam um espaço de dimensão 3 e são* linearmente independentes, *nenhum deles é combinação linear dos outros dois.*

gabarito:

4. *Espaço e dimensão*

Dados quatro vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ *de módulos diferentes, que quando somados pela regra do polígono usando* "coeficientes escalares convenientes"*, se tenha*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}\delta\vec{D} = \vec{R} = 0; \tag{3}$$

têm resultante, $\vec{R}$*, zero.*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Somar os vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$*, pela regra do polígono, usando* "coeficientes escalares convenientes"*,*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = \vec{R} = 0; \tag{4}$$

em que $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *são escalares dados, significa que o polígono formado pelos vetores assim escalados, formam um polígono fechado de quatro lados.*

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se for possível*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = 0; \tag{5}$$

em $\alpha \neq 0$ *então* $\vec{A}$ *é* combinação linear *dos demais vetores.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = 0; \tag{6}$$

então é possível estabelecer uma sistema de equações com as variáveis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *sendo uma possível solução* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = 0; \tag{7}$$

em que algum dos escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ for diferente de zero, *então este sistema de vetores é* linearmente dependente *e não pode definir um espaço de dimensão quatro.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \tag{8}$$

então não é possível escrever nenhum dos vetores

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \tag{9}$$

como combinação linear dos outros, estes vetores serão linearmente independentes *e* geram *um espaço de dimensão quatro.*

gabarito:

5. *Espaço e dimensão Considere quatro vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ de módulos possivelmente diferentes, que quando somados pela regra do polígono escalados com coeficientes convenientes,*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = 0; \tag{10}$$

têm resultante zero. Os coeficientes escalares convenientes *estão apresentados na equação (eq.10).*

(2) (V)[ ](F)[ ] *A soma de vetores é comutativa*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = \alpha\vec{B} + \beta\vec{A} + \delta\vec{C} + \gamma\vec{D} \tag{11}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *A soma de vetores é comutativa*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = \alpha\vec{A} + \delta\vec{D} + \gamma\vec{C} + \beta\vec{B} \tag{12}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Seja*

$$\vec{R} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}; \tag{13}$$

$\vec{R}$ é a resultante da soma $\alpha\vec{A} + \beta\vec{B}$ e os três $\vec{R}, \vec{A}, \vec{B}$ vetores se encontram num mesmo plano.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se*

$$\vec{R} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B}; \tag{14}$$

então os três vetores $\vec{R}, \vec{C}, \vec{D}$ se encontram num mesmo plano que nao precisa ser o plano determinado por $\vec{R}, \vec{A}, \vec{B}$.

(11) (V)[ ](F)[ ] *O espaço determinado pelos vetores $\vec{R}, \alpha\vec{A}, \beta\vec{B}$ é o mesmo determinado pelos vetores $\vec{R}, \vec{A}, \vec{B}$.*

gabarito:

6. *Espaço e dimensão Considere cinco vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ de módulos possivelmente diferentes, que quando somados pela regra do polígono escalados com coeficientes convenientes,*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} + \epsilon\vec{E} = 0; \tag{15}$$

*têm resultante zero. Os "*coeficientes escalares convenientes*" estão apresentados na equação (eq.15).*

(2) (V)[ ](F)[ ] *Os cinco vetores dados podem ser colineares determinando um espaço de dimensão* 1.

(3) (V)[ ](F)[ ] *Cinco vetores nunca podem ser colineares.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Pela equação (eq.15) estes vetores são linearmente dependentes então a dimensão máxima do espaço que eles determinam é* 4.

(7) (V)[ ](F)[ ] *A equação (eq.15) é apenas uma condição necessária para os vetores sejam linearmente dependentes não sendo possível determinar a dimensão máxima do espaço que eles determinam apenas com a equação (eq.15).*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se em lugar da equação eq.15) tivermos a afirmação*

$$\alpha\vec{A}+\beta\vec{B}+\gamma\vec{C}+\delta\vec{D}+\epsilon\vec{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\vec{A} = \beta\vec{B} = \gamma\vec{C} = \delta\vec{D} = \epsilon = 0; \tag{16}$$

como verdadeira, então os vetores $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E} = 0$; serão l.d. *e o espaço que eles determinam terá dimensão no máximo* 4.

gabarito:

7. *Espaço e dimensão*

Considere os quatro vetores

$$\vec{A} = (1,0,0,0), \vec{B} = (0,1,0,0), \vec{C} = (0,0,1,0), \vec{D} = (0,0,0,1)$$

e a combinação linear

$$\vec{R} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} \tag{17}$$

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $\vec{R} = (0,0,0,0)$ *então uma solução para o sistema que se pode deduzir da equação (eq.17) será*

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \tag{18}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *Se* $\vec{R} = (0,0,0,0)$ *então a única solução para o sistema que se pode deduzir da equação (eq.17) será*

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \tag{19}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Os vetores*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \tag{20}$$

são l.i..

(7) (V)[ ](F)[ ] *Os vetores*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \tag{21}$$

são l.d..

(11) (V)[ ](F)[ ] *Os vetores*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \tag{22}$$

são l.i. *e portanto geram um espaço de dimensão* 4.

gabarito:

8. *Espaço e dimensão Considere os vetores*

$$\vec{A} = (0,1,0,0), \vec{B} = (0,0,1,0), \vec{C} = (0,0,0,1), \vec{D} = (0,1,0,0)$$

e a combinação linear

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} = \vec{R}; \tag{23}$$

para escalares escolhidos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

(2) (V)[ ](F)[ ] *Se* $\vec{R} = (0,0,0,0)$ *então a única solução para o sistema que se pode deduzir da equação (eq.23) será*

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \tag{24}$$

(3) (V)[ ](F)[ ] *A equação (eq.23) não tem solução única.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se* $\vec{R} = (0,0,0,0)$, *como a equação (eq.23) não tem solução única então a implicação*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}\delta\vec{D} = \vec{R} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0;$$

não é verdadeira.

(7) (V)[ ](F)[ ] *Quando* $\vec{R} = (0,0,0,0)$ *a implicação*

$$\alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C}\delta\vec{D} = \vec{R} \;\Rightarrow\; \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0;$$

é verdadeira.

(11) (V)[ ](F)[ ] *O sistema de vetores*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \tag{25}$$

é um sistema l.i. *de vetores.*

gabarito:

9. *<u>Espaço e dimensão</u> Considere os vetores*

$$\vec{A} = (1,1,0,0,0), \vec{B} = (0,1,-1,1,0), \vec{C} = (0,2,-2,2,0) \quad (26)$$
$$\vec{D} = (0,0,0,0,1), \vec{E} = (0,0,0,1,0); \quad (27)$$

e a combinação linear

$$\vec{R} = \alpha\vec{A} + \beta\vec{B} + \gamma\vec{C} + \delta\vec{D} + \epsilon\vec{E}; \quad (28)$$

para escalares escolhidos $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$.

(2) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Os vetores*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D} \quad (29)$$

é um sistema de vetors l.d. *porque há dois vetores que são múltiplos um do outro.*

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Há dois dos vetores do sistema*

$$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E} \quad (30)$$

que são múltiplos um do outro. Se eliminarmos um deles o sistema resultante com três vetores será linearmene indepente.

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Dois dos vetores do sistema na equação (eq.30) são múltiplos um do outro. Se for retirado um deles, o sistema resultante gera um espaço de dimensão* 3.

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O sistema de vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ *tomados nesta ordem, forma uma matriz que se escalonada por linhas (matriz triangular superior) apresenta duas* linhas nulas.

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O sistema de vetores* $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$ *tomados nesta ordem, forma uma matriz que se escalonada por linhas (matriz triangular superior) apresenta uma linha nula.*

<u>gabarito:</u>

10. *<u>Espaço e dimensão</u> São dados n vetores do* $\mathbf{C}^n, \vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_n$, *o espaço vetorial complexo de dimensão n.*

Se o espaço complexo o estiver inibindo, substitua-o pelo espaço real $\mathbf{R}^n$.

(2) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se dispostos como uma matriz* $n \times n$ *os vetores* $\vec{A}_1, \cdots, \vec{A}_n$ *formam uma matriz* $\mathcal{A}$ *que representa uma* transformação linear

$$\mathcal{A} : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n \quad (31)$$

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A matriz mencionada no item anterior representa uma transformação linear*

$$\mathcal{A} : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^n$$

cujas colunas geram o espaço imagem da transformação linear que $\mathcal{A}$ *representa numa base comum aos espaços de chegada e saída.*

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se a matriz mencionada no primeiro item,* $\mathcal{A}$, *for transformada numa matriz triangular superior que lhe seja equivalente,* escalonada, *o número* <u>c</u> *de linhas não nulas é a dimensão do espaço imagem da transformação linear representada por* $\mathcal{A}$.

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O* posto da matriz $\mathcal{A}$ *é o número de linhas não nulas quando* $\mathcal{A}$ *for escalonada, transformada em* matriz triangular superior.

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O posto da matriz* $\mathcal{A}$ *é a* dimensão do espaço *imagem da transformação linear representada por* $\mathcal{A}$.

<u>gabarito:</u>

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] Gerônimo J.R. e Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo diferencial e integral com apoio computacional Vol I*. Departamento de Matemática da UEM, 1991.

[3] Gerônimo J.R. e Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol II*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[4] Gerônimo J.R. e Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol III*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[5] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[6] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo com apoio computacional*. Biblioteca da Universidade Federal de Goiás, 1985.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional - Introdução à programação*. Publicações da UVA - Sobral - Ce, 2000.