

ALGA
Plano Cartesiano
T. Praciano-Pereira

Lista numero 1
tarcisio.praciano@gmail.com
Sobral Matemática

alun@:

15 de fevereiro de 2015 **Universidade**

Produzido com \LaTeX sis. op. Debian/GNU/Linux

www.geometria.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Confira na página da disciplina, [1], um texto de apoio a esta lista.

Exercícios 1 *Plano Cartesiano*

objetivo: *Digitalizar a geometria. Induzir @s alun@s a recuperarem as propriedades da geometria usando a algebrização oferecida pela Geometria Analítica e desta forma usando a Geometria Analítica sentirem sua potência como instrumento para dominar a geometria.*

palavras chave: **ponto no plano, segmento de reta, distância.**

1. A reta numérica

A reta tem propriedades que são copiadas pelos números reais: “entre dois pontos da reta sempre tem outro ponto”, é um exemplo. Selecione as afirmações verdadeiras das semelhanças entre números e a reta da geometria.

Leia o texto na página, mas dê prioridade ao trabalho direto com as questões.

Trace uma reta e nela marque o ponto zero.

- (a) (V)[](F)[] *Ao selecionar um outro ponto na reta e identificá-lo com o número 1 você selecionou a semireta que contém todos os números reais positivos.*
- (b) (V)[](F)[] *Na figura (fig 1), página 2, está identificado um segmento de reta que mede uma unidade.*
- (c) (V)[](F)[] *Na figura (fig 1), página 2, o segmento de reta que mede uma unidade é \overline{AC} .*

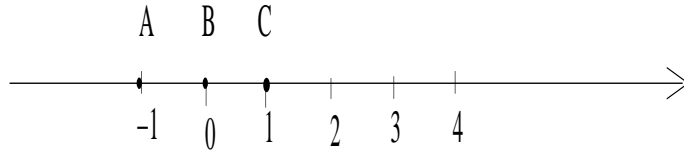


Figura 1: números reais na reta numérica

- (d) (V)[](F)[] Na figura (fig 1), página 2, está identificado um segmento de reta que mede uma unidade que tanto pode ser o segmento \overline{BA} como o segmento \overline{BC}
- (e) (V)[](F)[] Pela escolha dum segmento que mede uma unidade podemos, usando compasso, marcar qualquer inteiro na reta numérica. Também podemos marcar a posição de qualquer número fracionário.
2. relação de ordem, ou desigualdade A definição “algébrica” da desigualdade é

$$x \leq y \iff x - y \leq 0$$

mas na reta numérica, escolhi a posição do 1 à direita do zero¹, então, na reta numérica

$$x \leq y \iff x \text{ está à esquerda de } y;$$

Algumas vezes chamamos a reta formatada de “reta orientada” porque nela está definida uma ordem.

- (a) (V)[](F)[] Na figura (fig 2), página 3, as duas retas são concorrentes no zero, são duas instâncias da reta orientada e numa delas podemos identificar, pela equivalência de triângulos, as frações

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}; \tag{1}$$

- (b) (V)[](F)[] Na figura (fig 2), página 3, identifique o “terceiro lado” do triângulo que une os pontos 1 e 3 em distintas reta. Passando uma paralela ao “terceiro lado” pelo ponto 4 da reta horizontal, ela irá encontrar a reta que lhe é oblíqua no ponto 12 o que

¹Um “problema” de *convenção*, o que seria mesmo “direita” ou “esquerda” se a reta estivesse perpendicular à linha do Horizonte?

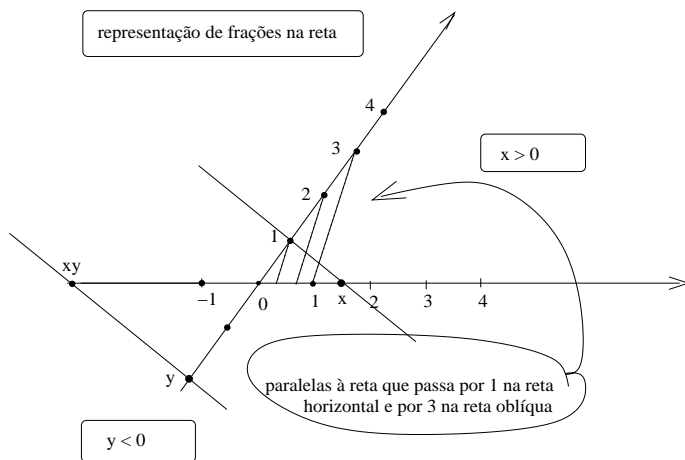


Figura 2:

mostra como multiplicar ab usando retas orientadas concorrentes em zero.

- (c) (V)[](F)[] A figura (fig 2), página 3 mostra que se $x > 0$ e $y < 0$ então $xy < 0$.
- (d) (V)[](F)[] a definição geométrica da desigualdade é incompatível com definição algébrica da desigualdade.
- (e) (V)[](F)[] Dados dois pontos x, y na reta numérica, se x estiver à direita de y então $x - y$ estará à direita de zero e isto se conclue, com diferença de segmentos,

$$\overline{Ox} - \overline{Oy} \quad (2)$$

“é o segmento que tem por origem y e extremidade x portanto está orientado no sentido negativo da reta numérica”, então $x - y \leq 0$ ou ainda, pela definição algébrica, $x \leq y$. Assim a definição geométrica e a definição algébrica são compatíveis.

3. álgebra geométrica definição geométrica do módulo. Um círculo centrado no zero da reta numérica encontra esta em dois pontos que tem o mesmo módulo e conseqüentemente o raio do círculo é o módulo de qualquer destes números. Esta é uma definição geométrica de módulo.

- (a) (V)[](F)[] Se $|x| < 1$ e $|y| < 1$ então $|xy| < 1$.

(b) (V)[](F)[] Se $0 < a < b$ e $c > 0$ então $0 < ac < bc$.

(c) (V)[](F)[] Na figura (fig 3), página 4, você pode ver que a distância

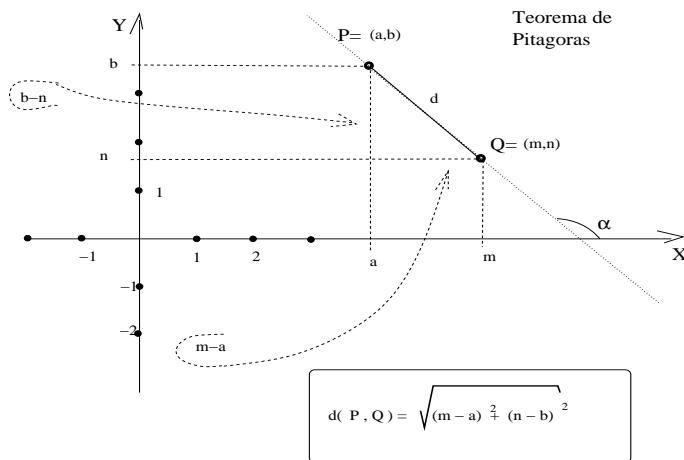


Figura 3: O plano cartesiano

entre dois pontos é calculada com auxílio do teorema de Pitágoras.

(d) (V)[](F)[] Se $P = (3, 5), Q = (7, 2)$ então a distância $d(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2}$.

(e) (V)[](F)[] Se $P = (3, 5), Q = (7, 2)$ então a distância

$$d(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (5-2)^2} \quad (3)$$

4. Multiplicação geométrica e desigualdade Na (fig 4) identifique a “reta orientada horizontal” e a “reta orientada que é oblíqua à horizontal”. Vou me referir a estas duas retas apenas com os adjetivos “horizontal” e “oblíqua”.

Na figura (fig 4), página 5,

- Identifique x selecionado na reta horizontal, e y selecionado na reta oblíqua.
- O ponto x na reta horizontal está ligado pelo segmento de reta $\overline{x1}$ à unidade na reta oblíqua.
- A paralela ao segmento de reta $x1$ passando pelo ponto y na reta oblíqua, encontra a reta horizontal no ponto xy .

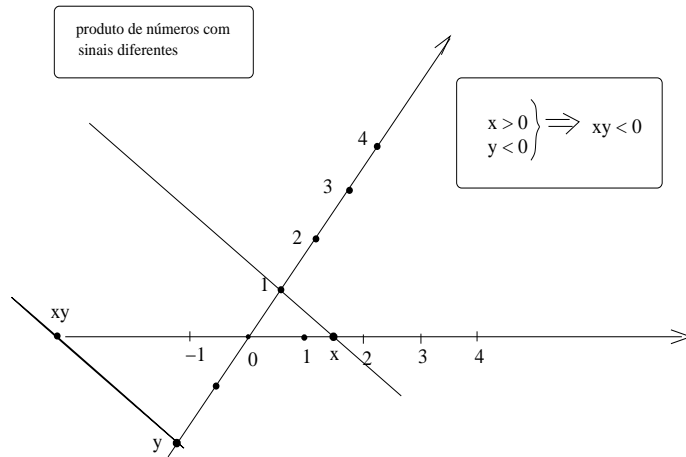


Figura 4: O produto geométrico

- (a) (V)[](F)[] Os pontos $x, 1, 0$ determinam um triângulo que não é semelhante ao triângulo determinado pelos os pontos $0, y, xy$, porque os dois triângulos têm alturas com sinais contrários.
- (b) (V)[](F)[] Os pontos $x, 1, 0$ determinam um triângulo semelhante ao triângulo que os pontos $0, y, xy$ determinam.
- (c) (V)[](F)[] Os lados homólogos nos dois nos triângulos $x10$ e $0yxy$ são, respectivamente:
- $x1$ e $0y$;
 - 10 e yxy ;
 - $0x$ e $xy0$
- (d) (V)[](F)[] Os lados homólogos nos dois nos triângulos $x10$ e $0yxy$ são, respectivamente:
- $x1$ e yxy ;
 - 10 e $0y$;
 - $0x$ e $xy0$
- (e) (V)[](F)[] A paralela pelo ponto y encontra o ponto xy . A justificativa destas operações é a semelhança de triângulos da geometria e mostra que podemos efetuar, geometricamente, a multiplicação.

5. Plano Cartesiano

- (a) (V)[](F)[] Dados os pontos A, B, C, D sobre uma mesma reta, então

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}; \quad (4)$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}; \quad (5)$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DD} = \overline{AD}; \quad (6)$$

Este cálculos mostram que é possível “geometrizar” a “álgebra” no sentido de traduzir geometricamente as propriedades algébricas.

- (b) (V)[](F)[] Considere dois pontos, P, Q ,

$$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2); \quad (7)$$

$$R = (sx_1 + tx_2, sy_1 + ty_2); s, t \geq 0; s + t = 1; \quad (8)$$

O ponto R é média aritmética ponderada de P, Q e consequentemente se encontram sobre o segmento de reta \overline{PQ} .

- (c) (V)[](F)[] O segmento de reta \overline{PQ} é o lugar geométrico das médias aritméticas ponderadas entre os pontos P e Q .

- (d) (V)[](F)[] Sendo $P = (1, 0), Q = (0, 1)$ e $R = (1, 1)$ então é possível encontrar $s, t \geq 0; s + t = 1$; tal que

$$R = sP + tQ$$

- (e) (V)[](F)[] Na figura (fig 5), página 7, está representada a média aritmética ponderada entre dois pontos P, Q do plano. Então

$$\begin{cases} t \neq 0; \\ x = t \left(m + \frac{1-t}{t} a \right); \\ y = t \left(n + \frac{1-t}{t} b \right); \\ t = 0 \Rightarrow (x, y) = P = (a, b); \end{cases} \quad (9)$$

t ou $(1 - t)$, é a razão em que o segmento PQ está sendo dividido por (x, y) .

6. Plano Cartesiano

- (a) (V)[](F)[] O ponto médio do segmento determinado por $P = (7, -9)$ e $Q = (-5, 15)$ é $R = (0.5, 3.5)$.

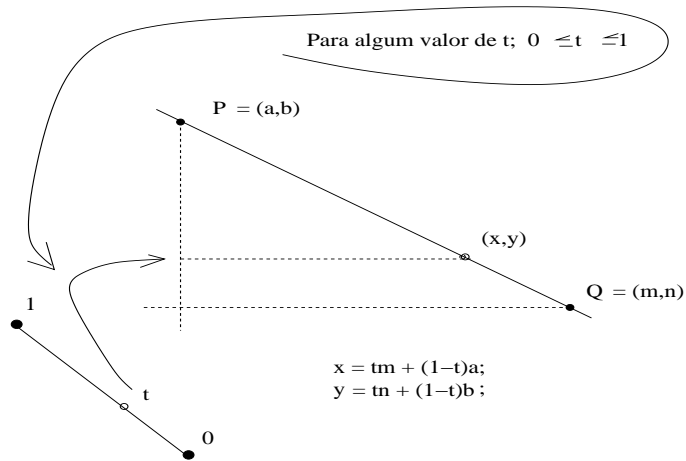


Figura 5: Média aritmética ponderada

(b) (V)[](F)[] O ponto médio do segmento determinado por $P = (7, -9)$ e $Q = (-5, 15)$ é $R = (1, 3)$,

(c) (V)[](F)[] Um ponto que divide o segmento

$$\overline{PQ}; P = (7, -9); Q = (-5, 15);$$

na razão $\frac{1}{3}$ é $(x, y) = (-1, 7)$.

(d) (V)[](F)[] Um ponto que divide o segmento $\overline{PQ}; P = (7, -9); Q = (-5, 15)$ na razão $\frac{1}{3}$ é

$$(x, y) = (3, -1);$$

(e) (V)[](F)[] A distância entre os pontos

$$P = (7, -9); Q = (-5, 15)$$

é $\sqrt{12^2 + (-24)^2} \approx 26.832815$.

7. Distância entre dois pontos

A expressão

define $\text{dist}(x_1, y_1, x_2, y_2)$ {

```

    return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));
}

```

define uma função, da linguagem `calc`, [3], que calcula a distância entre dois pontos

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ e } P_2 = (x_2, y_2) \quad (10)$$

no plano. `calc`, [3], é uma linguagem de programação interpretada e distribuída com a licença **GPL** e pode ser encontrada aqui, [3], e também nas maioria das distribuições de **GNU/Linux**.

`dist(-3,-1,-5,-10) --> 9.21954445729288731`

é a distância entre os pontos $(-3, -1), (-5, -10)$ calculada com esta função.

(a) (V)[](F)[] Do segmento de reta \overline{PQ} sabemos que $P = (-3, 7)$ e que o ponto médio é $(7, 11)$ então

$$Q = (10, -5)$$

(b) (V)[](F)[] Do segmento de reta \overline{PQ} sabemos que $P = (-3, 7)$ e que o ponto médio é $(7, 11)$ então

$$Q = (15, -5)$$

(c) (V)[](F)[] Um quadrado cujo lado mede a tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos.

Seus vértices são:

$$P_1 = (-d, d), P_2 = (-d, -d), P_3 = (d, d), P_4 = (d, -d);$$

$$\text{com } d = d = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}.$$

(d) (V)[](F)[] Um quadrado cujo lado mede a tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos. Seus vértices são:

$$P_1 = (-d, 0), P_2 = (d, 0), P_3 = (0, d), P_4 = (0, -d);$$

$$\text{com } d = d = \frac{\sqrt{2}a^2}{2}.$$

(e) (V)[](F)[] Três vértices dum quadrilátero retângulo são

$$P_1 = (2, -1), P_2 = (7, -1), P_3 = (7, 3)$$

O quarto vértice é $P_4 = (2, -1)$.

8. ângulo entre vetores

Os vértices de um triângulo são $P_1 = (1, 1), P_2 = (4, 4), P_3 = (1, 4)$.

Para esta questão é interessante usar o produto escalar de vetores:

Definição 1 () Produto escalar

$$\langle (a, b), (m, n) \rangle = |(a, b)| |(m, n)| \cos(\alpha) = am + bn;$$

em que α é o ângulo entre os vetores $(a, b), (m, n)$.

O produto escalar serve para verificar quando dois vetores são ortogonais usando a identidade entre as duas formas da definição.

Posso definir uma função `calc`, [3], para efetuar esta conta:

```
define ProdEscalar(a,b,m,n) { return am + bn; }
```

(a) (V)[](F)[] O triângulo $P_1P_2P_3$ é isosceles.

(b) (V)[](F)[] O triângulo $P_1P_2P_3$ é retângulo e a hipotenusa mede $3\sqrt{2}$.

(c) (V)[](F)[] Os lados do triângulo $P_1P_2P_3$ medem $3, 3, 3\sqrt{2}$.

(d) (V)[](F)[] Os pontos médios das lados do triângulo $P_1P_2P_3$ são, $(2.5, 2.5), (4, 2.5), (2.5, 4)$.

(e) (V)[](F)[] O centro de gravidade do triângulo $P_1P_2P_3$ é $(2, 3)$.

9. Plano Cartesiano

Defina $d = \sqrt[3]{5}; \theta = \frac{2\pi}{3}$; Num triângulo equilátero dois vértices são $d(\cos(\theta), \sin(\theta)), d(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$

(a) (V)[](F)[] o terceiro vértice é $(d, 0)$.

- (b) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ O tamanho comum dos lados do triângulo é d .
- (c) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ O tamanho comum dos lados do triângulo é $\approx 2.96176521936472847706$
- (d) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ A área deste triângulo é

$$\approx 2.96176521936472847706(d - \cos(\theta));$$

- (e) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ O centro de massa, também chamado de baricentro, do triângulo é a origem dos eixos.

10. Plano Cartesiano O módulo dum número complexo, $z = (a + bi)$, é a distância do ponto (a, b) à origem, e o argumento do número complexo $z = (a + bi)$ é o ângulo entre o raio vetor $a + bi$ e o eixo OX . Desta forma podemos representar o número complexo $z = (a + bi)$ usando sua representação trigonométrica:

$$z = (a + bi) = \rho(\cos(\theta), \sin(\theta)); \quad (11)$$

$$\theta = \arg(z); \rho = |z|; \quad (12)$$

confira a figura (fig 6), página 11. As equações (11) (12) trazem as expressões da forma trigonométrica do número complexo também dita representação do número complexo em coordenadas polares. Neste exercício você vai ver que os números complexos produzem rotações e dilatações no plano. Eles são precursores dos quaternions que fazem isto no espaço tridimensional.

Depois, com matrizes, podemos produzir tais efeitos em qualquer dimensão.

Considere o triângulo de vértices

$$P_1 = (3, 3); P_2 = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}); P_3 = (-3, -3);$$

Confira a figura (fig 6), página 11.

- (a) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ O triângulo $P_1P_2P_3$ é equilátero.
- (b) $\underline{(V)}[\](F)[\]$ Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo $Q_1Q_2Q_3$ que é um triângulo equilátero.

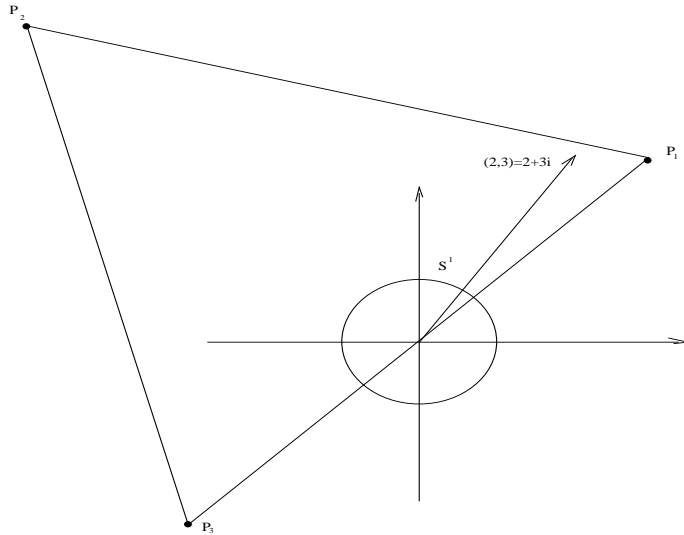


Figura 6: produto por um número complexo

- (c) (V)[](F)[] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2 + 3i$ produz o triângulo $Q_1Q_2Q_3$ que não é mais um triângulo equilátero.
- (d) (V)[](F)[] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2 + 3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2};$$

- (e) (V)[](F)[] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2 + 3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente

$$|z| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

tendo lhe sido aplicada uma rotação de $\arg(z) = \text{Atan}(3/2)$ relativa ao triângulo original.

11. Plano Cartesiano

A função

```
define ProdEsc(x1,y1,x2,y2) {return x1*x2 + y1*y2;}
```

define o produto escalar entre dois vetores na linguagem `calc`, [3]

$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1), (\vec{x}_2, \vec{y}_2) \quad (13)$$

e o produto escalar é definido geometricamente como

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)| |(x_2, y_2)| \cos(\alpha) \quad (14)$$

em que $\cos(\alpha)$ é o ângulo entre as retas suporte destes vetores tomado no sentido trigonométrico positivo. O produto escalar mostra se os dois vetores são ou não ortogonais quando ele se anular e serve para definir o ângulo entre dois vetores.

A função

```
define dist(x1,y1,x2,y2)
  {return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));}
```

define, na linguagem `calc` a distância entre os pontos

$$P_1 = (x_1, y_1); P_2 = (x_2, y_2) \quad (15)$$

O produto vetorial entre dois vetores é definido como

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)| |(x_2, y_2)| \sin(\alpha) \quad (16)$$

e corresponde ao módulo do determinante

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

O produto vetorial é também chamado de produto externo porque dois vetores, que determinam um plano, definem, como produto externo um terceiro vetor que lhes é perpendicular, devido aos vetores da Física $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. O módulo do produto vetorial corresponde à área do paralelograma que se pode obter com os dois vetores \vec{u}, \vec{v} , como mostra a figura (fig 7), página 13.

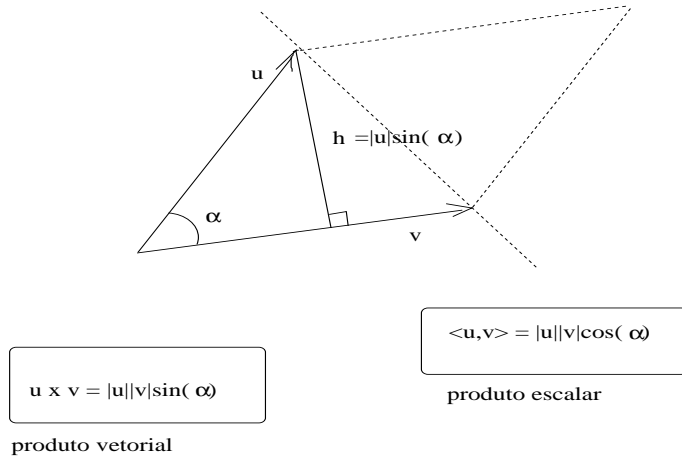


Figura 7: produto vetorial e produto escalar

(a) (V) (F) O perímetro do quadrilátero cujos vértices são

$$P_1 = (-3, -1), P_2 = (0, 3), P_3 = (3, 4), P_4 = (-5, 10) \quad (18)$$

é aproximadamente 29.34261754766732781405.

(b) (V) (F) Os pontos

$$P_1 = (2, -2), P_2 = (-8, 4), P_3 = (5, 3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 30

(c) (V) (F) Os pontos

$$P_1 = (2, -2), P_2 = (-8, 4), P_3 = (5, 3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 68

(d) (V) (F) Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é 5 é o ponto $(3, -2)$ e o outro extremo é o ponto $(0, -7)$.

(e) (V) (F) Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é 5 é o ponto $(3, -2)$ e o outro extremo é o ponto $(0, -6)$.

A figura (fig 8), página 14, mostra como círculos servem para medir distâncias.

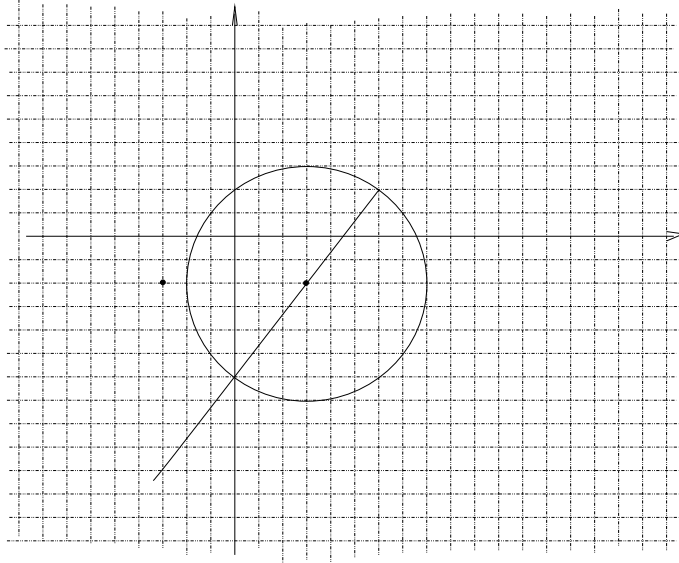


Figura 8: Círculo mede a distância

Referências

- [1] Praciano-Pereira Tarcisio. Sobral matemática. Technical report, Sobral Matemática - <http://www.sobralmatematica.org>, <http://www.sobralmatematica.org>, 2009.
- [2] the free encyclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free encyclopedia in the internet. <http://www.wikipedia.org>.
- [3] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, <http://www.isthe.com/chongo/>, 2011.
- [4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, <http://www.gnuplot.info>, 2010.