ALGA	**Lista numero 1**
Plano Cartesiano	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
15 de fevereiro de 2015	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.geometria.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Confira na página da disciplina, [1], um texto de apoio a esta lista.

Exercícios 1 *Plano Cartesiano*
objetivo: *Digitalizar a geometria. Induzir @s alun@s a recuperarem as propriedades da geometria usando a algebrização oferecida pela Geometria Analítica e desta forma* usando *a Geometria Analítica sentirem sua potência como instrumento para dominar a geometria.*
palavras chave: ponto no plano, segmento de reta, distância.

1. *A reta numérica*

   A reta tem propriedades que são copiadas pelos números reais: "entre dois pontos da reta sempre tem outro ponto*", é um exemplo. Selecione as afirmações verdadeiras das semelhanças entre números e a reta da geometria.*

   Leia o texto na página, mas dê prioridade ao trabalho direto com as questões.

   Trace uma reta e nela marque o ponto zero.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Ao selecionar um outro ponto na reta e identificá-lo com o número 1 você selecionou a semireta que contém todos os números reais positivos.*

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 1), página 2, está identificado um segmento de reta que mede uma unidade.*

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 1), página 2, o semento de reta que mede uma unidade é $\overline{AC}$.*

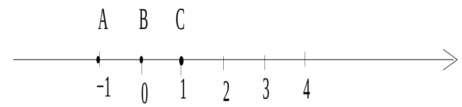

Figura 1: números reais na reta numérica

   (d) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 1), página 2, está identificado um segmento de reta que mede uma unidade que tanto pode ser o segmento $\overline{BA}$ como o segmento $\overline{BC}$*

   (e) *(V)[ ](F)[ ] Pela escolha dum segmento que mede uma unidade podemos, usando compasso, marcar qualquer inteiro na reta numérica. Também podemos marcar a posição de qualquer número fracionário.*

2. *relação de ordem, ou desigualdade A definição "algébrica" da desigualdade é*

$$x \le y \iff x - y \le 0$$

   mas na reta numérica, escolhi a posição do 1 *à direita do zero*[1]*, então, na reta numérica*

$$x \le y \iff x \text{ está à esquerda de } y;$$

   Algumas vezes chamamos a reta formatada de "reta orientada*" porque nela está definida uma ordem.*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 2), página 3, as duas retas são concorrentes no zero, são duas instâncias da* reta orientada *e numa delas podemos identificar, pela equivalência de triângulos, as frações*

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}; \tag{1}$$

   (b) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 2), página 3, identifique o "terceiro lado" do triângulo que une os pontos* 1 *e* 3 *em distintas reta. Passando uma paralela ao "terceiro lado" pelo ponto* 4 *da reta horizontal, ela irá encontra a reta que lhe é obliqua no ponto* 12 *o que*

[1] Um "problema" de *convenção*, o que seria mesmo "direita" ou "esquerda" se a reta estivesse perpendicular à linha do Horizonte?

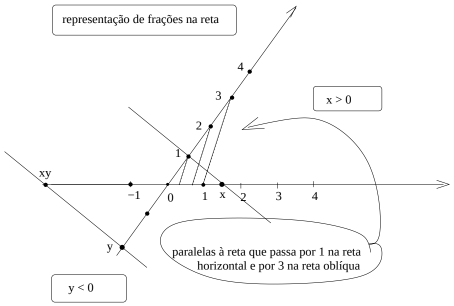

Figura 2:

mostra como multiplicar ab usando retas orientadas concorrentes em zero.

(c) *(V)[ ](F)[ ] A figura (fig 2), página 3 mostra que se* $x > 0$ *e* $y < 0$ *então* $xy < 0$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] a definição geométrica da desigualdade é incompatível com definição algébrica da desigualdade.*

(e) *(V)[ ](F)[ ] Dados dois pontos* x, y *na reta numérica, se* x *estiver à direita de* y *então* $x - y$ *estará à direta de zero e isto se conclue, com difererença de segmentos,*

$$\overline{Ox} - \overline{Oy} \tag{2}$$

"é o segmento que tem por origem y e extremidade x *portanto está orientado no* sentido negativo *da reta numérica", então* $x - y \leq 0$ *ou ainda, pela definição algébrica,* $x \leq y$. *Assim a* definição geométrica *e a* definição algébrica *são compatíveis.*

3. *álgebra geométrica definição geométrica do módulo. Um círculo centrado no zero da* reta numérica *encontra esta em dois pontos que tem o mesmo módulo e consequentemente o raio do círculo é o módulo de qualquer destes números. Esta é uma definição geométrica de módulo.*

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Se* $|x| < 1$ *e* $|y| < 1$ *então* $|xy| < 1$.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Se* $0 < a < b$ *e* $c > 0$ *então* $0 < ac < bc$.

(c) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 3), página 4, você pode ver que a distância*

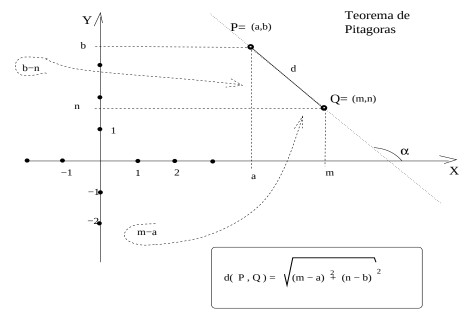

Figura 3: O plano cartesiano

entre dois pontos é calculada com auxílio do teorema de Pitágoras.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se* $P = (3, 5), Q = (7, 2)$ *então a distância* $d(P, Q) = (7 - 3) + (2 - 5)$.

(e) *(V)[ ](F)[ ] Se* $P = (3, 5), Q = (7, 2)$ *então a distância*

$$d(P, Q) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(3-7)^2 + (5-2)^2} \tag{3}$$

4. *Multiplicação geométrica e desigualdade Na (fig 4) identique a* "reta orientada horizontal" *e a* "reta orientada que é obliqua à horizontal". *Vou me referir a estas duas retas apenas com os adjetivos* "horizontal" *e* "obliqua".

   Na figura (fig 4), página 5,

   - *Identifique* x *selecionado na* reta horizontal, *e* y *selecionado na reta obliqua.*
   - *O ponto* x *na* reta horizontal *está ligado pelo segmento de reta* $\overline{x1}$ *à unidade na* reta oblíqua.
   - *A paralela ao segmento de reta* $x1$ *passando pelo ponto* y *na* reta oblíqua, *encontra a* reta horizontal *no ponto* xy.

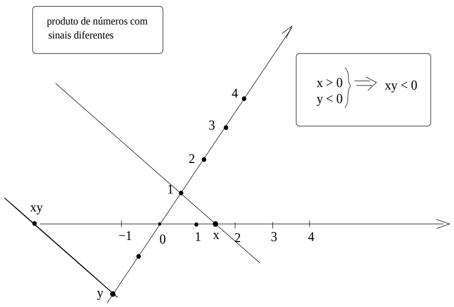

Figura 4: O produto geométrico

(a) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos $x, 1, 0$ determinam um triângulo que* <u>*não é semelhante*</u> *ao triângulo determinado pelos os pontos $0, y, xy$, porque os dois triângulos têm alturas com sinais contrários.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]Os pontos $x, 1, 0$ determinam um triângulo semelhante ao triângulo que os pontos $0, y, xy$ determinam.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os lados homológos nos dois nos triângulos $x10$ e $0yxy$ são, respectivamente:*

- $x1$ *e* $0y$ *;*
- 10 *e* yxy*;*
- $0x$ *e* $xy0$

(d) *(V)[ ](F)[ ] Os lados homológos nos dois nos triângulos $x10$ e $0yxy$ são, respectivamente:*

- $x1$ *e* yxy*;*
- 10 *e* $0y$ *;*
- $0x$ *e* $xy0$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A paralela pelo ponto y encontra o ponto xy. A justificativa destas operações é a semelhança de triângulos da geometria e mostra que podemos efetuar, geometricamente, a multiplicação.*

5. <u>*Plano Cartesiano*</u>

(a) *(V)[ ](F)[ ] Dados os pontos A, B, C, D sobre uma mesma reta, então*

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = \overline{AD}; \quad (4)$$

$$\overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA}; \quad (5)$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DD} = \overline{AD}; \quad (6)$$

Este cálculos mostram que é possivel "geometrizar" a "álgebra" no sentido de traduzir geometricamente as propriedades algébricas.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Considere dois pontos, P, Q,*

$$P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2); \quad (7)$$

$$R = (sx_1 + tx_2, sy_1 + ty_2); s, t \geq 0; s + t = 1; \quad (8)$$

O ponto R é média aritmética ponderada de P, Q e consequentemente se encontram sobre o segmento de reta $\overline{PQ}$.

(c) *(V)[ ](F)[ ] O segmento de reta $\overline{PQ}$ é o* lugar geometrico das médias aritméticas ponderadas entre os pontos P e Q.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Sendo $P = (1, 0), Q = (0, 1) e R = (1, 1)$ então é possível encontrar $s, t \geq 0; s + t = 1$; tal que*

$$R = sP + tQ$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (fig 5), página 7, está representada a* média aritmética ponderada *entre dois pontos P, Q do plano. Então*

$$\begin{cases} t \neq 0; \\ x = t\left(m + \frac{1-t}{t}a\right); \\ y = t\left(n + \frac{1-t}{t}b\right); \\ t = 0 \ \Rightarrow \ (x, y) = P = (a, b); \end{cases} \quad (9)$$

t ou $(1 - t)$, é a razão em que o segmento PQ está sendo dividido por (x, y).

6. <u>*Plano Cartesiano*</u>

(a) *(V)[ ](F)[ ] O ponto médio do segmento determinado por $P = (7, -9)$ e $Q = (-5, 15)$ é $R = (0.5, 3.5)$.*

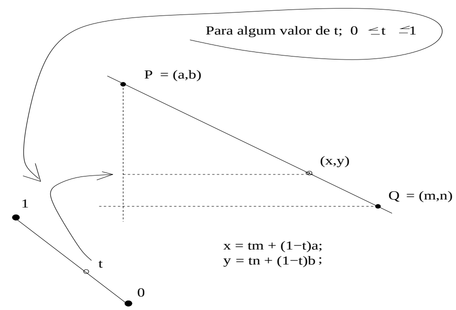

Figura 5: Média aritmética ponderada

(b) *(V)[ ](F)[ ] O ponto médio do segmento determinado por* $P = (7,-9)$ *e* $Q = (-5,15)$ *é* $R = (1,3)$,

(c) *(V)[ ](F)[ ] Um ponto que divide o segmento*

$$\overline{PQ}; P = (7,-9); Q = (-5,15);$$

na razão $\frac{1}{3}$ *é* $(x,y) = (-1,7)$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Um ponto que divide o segmento* $\overline{PQ}; P = (7,-9); Q = (-5,15)$ *na razão* $\frac{1}{3}$ *é*

$$(x,y) = (3,-1);$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A distância entre os pontos*

$$P = (7,-9); Q = (-5,15)$$

é $\sqrt{12^2 + (-24)^2} \approx 26.832815$.

7. *Distância entre dois pontos*

A expressão

```
define dist(x1,y1,x2,y2) {
```



```
        return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));
}
```

define uma função, da liguagem **calc***, [3], que calcula a distância entre dois pontos*

$$P_1 = (x_1, y_1) \text{ e } P_2 = (x_2, y_2) \tag{10}$$

no plano. **calc***, [3], é uma linguagem de programação interpretada e distribuida com a licença* ***GPL*** *e pode ser encontrada aqui, [3], e também nas maioria das distribuições de* ***GNU/Linux****.*

```
dist(-3,-1,-5,-10) --> 9.21954445729288731
```

é a distância entre os pontos $(-3,-1), (-5,-10)$ *calculada com esta função.*

(a) *(V)[ ](F)[ ] Do segmento de reta* $\overline{PQ}$ *sabemos que* $P = (-3,7)$ *e que o ponto médio é* $(7,11)$ *então*

$$Q = (10,-5)$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] Do segmento de reta* $\overline{PQ}$ *sabemos que* $P = (-3,7)$ *e que o ponto médio é* $(7,11)$ *então*

$$Q = (15,-5)$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] Um quadrado cujo lado mede* $\underline{a}$ *tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos.*

Seus vértices são:

$$P_1 = (-d,d), P_2 = (-d,-d), P_3 = (d,d), P_4 = (d,-d);$$

com $d = d = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Um quadrado cujo lado mede a tem o centro na origem dos eixos e lados paralelos com as bissetrizes dos eixos. Seus vértices são:*

$$P_1 = (-d,0), P_2 = (d,0), P_3 = (0,d), P_4 = (0,-d);$$

com $d = d = \frac{\sqrt{2a^2}}{2}$.

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *Três vértices dum quadrilátero retângulo são*

$$P_1 = (2, -1), P_2 = (7, -1), P_3 = (7, 3)$$

O quarto vértice é $P_4 = (2, -1)$.

8. *ângulo entre vetores*

Os vértices de um triângulo são $P_1 = (1, 1), P_2 = (4, 4), P_3 = (1, 4)$.

Para esta questão é interessante usar o produto escalar de vetores:

Definição 1 () *Produto escalar*

$$< (a, b), (m, n) >= |(a, b)||(m, n)| \cos(\alpha) = am + bn;$$

em que α *é o ângulo entre os vetores* $(a, b), (m, n)$.

O produto escalar serve para verificar quando dois vetores são ortogonais usando a identidade entre as duas formas da definição.

Posso definir uma função `calc`*, [3], para efetuar esta conta:*

```
define ProdEscalar(a,b,m,n} { return am + bn; }
```

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *O triângulo* $P_1P_2P_3$ *é isosceles.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *O triângulo* $P_1P_2P_3$ *é retângulo e a hipotenusa mede* $3\sqrt{2}$.

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *Os lados do triângulo* $P_1P_2P_3$ *medem* $3, 3, 3\sqrt{2}$.

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *Os pontos médios das lados do triângulo* $P_1P_2P_3$ *são,* $(2.5, 2.5), (4, 2.5), (2.5, 4)$.

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *O centro de gravidade do triângulo* $P_1P_2P_3$ *é* $(2, 3)$.

9. *Plano Cartesiano*

Defina $d = \sqrt[3]{5}; \theta = \frac{2\pi}{3}$; *Num triângulo equilátero dois vértices são* $d(\cos(\theta), \sin(\theta)), d(\cos(2\theta), \sin(2\theta))$

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *o terceiro vértice é* $(d, 0)$.

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *O tamanho comum dos lados do triângulo é d.*

(c) *(V)[ ](F)[ ]* *O tamanho comum dos lados do triângulo é* $\approx 2.96176521936472847706$

(d) *(V)[ ](F)[ ]* *A área deste triângulo é*

$$\approx 2.96176521936472847706(d - cos(\theta);$$

(e) *(V)[ ](F)[ ]* *O centro de massa, também chamado de baricentro, do triângulo é a origem dos eixos.*

10. *Plano Cartesiano* *O módulo dum número complexo,* $z = (a + bi)$, *é a distância do ponto* (a, b) *à origem, e o argumento do número complexo* $z = (a + bi)$ *é o ângulo entre entre o raio vetor* $a \vec{+} bi$ *e o eixo* OX. *Desta forma podemos representar o número complexo* $z = (a + bi)$ *usando sua representação trigonométrica:*

$$z = (a + bi) = \rho (\cos(\theta), \sin(\theta)); \tag{11}$$

$$\theta = arg(z); \rho = |z|; \tag{12}$$

confira a figura (fig 6), página 11. As equações (11) (12) trazem as expressões da forma trigonométrica *do número complexo também dita* representaçao do número complexo em coordenadas polares. *Neste exercício você vai ver que os números complexos produzem rotações e dilatações no plano. Eles são precursores dos* quaternions *que fazem isto no espaço tridimensional.*

Depois, com matrizes, podemos produzir tais efeitos em qualquer dimensão.

Considere o triângulo de vértices

$$P_1 = (3, 3); P_2 = (-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}); P_3 = (-3, -3);$$

Confira a figura (fig 6), página 11.

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *O triângulo* $P_1P_2P_3$ *é equilátero.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *Considere os vértices do triângulo* $P_1P_2P_3$ *como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo* $z = 2{+}3i$ *produz o triângulo* $Q_1Q_2Q_3$ *que é um triângulo equilátero.*

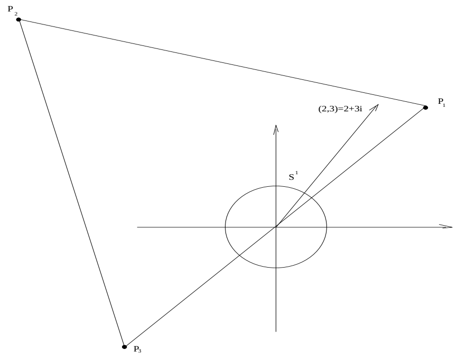

Figura 6: produto por um número complexo

(c) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo $Q_1Q_2Q_3$ que não é mais um triângulo equilátero.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente*

$$|z| = \sqrt{2^2+3^2};$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Considere os vértices do triângulo $P_1P_2P_3$ como três números complexos. A multiplicação deles pelo número complexo $z = 2+3i$ produz o triângulo equilátero $Q_1Q_2Q_3$ cujos lados ficaram dilatados pelo coeficiente*

$$|z| = \sqrt{2^2+3^2}$$

tendo lhe sido aplicada uma rotação de $arg(z) = Atan(3/2)$ relativa ao triângulo original.

11. *Plano Cartesiano*

A função

```
define ProdEsc(x1,y1,x2,y2) {return x1*x2 + y1*y2;}
```

define o produto escalar entre dois vetores na linguagem **`calc`**, *[3]*

$$\vec{(x_1, y_1)}, \vec{(x_2, y_2)} \tag{13}$$

e o produto escalar é definido geometricamente como

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)||(x_2, y_2)| \cos(\alpha) \tag{14}$$

em que $\cos(\alpha)$ é o ângulo entre as retas suporte destes vetores tomado no sentido trigonométrico positivo. O produto escalar mostra se os dois vetores são ou não ortogonais quando ele se anular e serve para definir o ângulo entre dois vetores.

A função

```
define dist(x1,y1,x2,y2)
   {return sqrt(power(x1-x2,2) + power(y1-y2,2));}
```

define, na linguagem **`calc`** *a distância entre os pontos*

$$P_1 = (x_1, y_1); P_2 = (x_2, y_2) \tag{15}$$

O produto vetorial entre dois vetores é definido como

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = |(x_1, y_1)||(x_2, y_2)| \sin(\alpha) \tag{16}$$

e corresponde ao módulo do determinante

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

O produto vetorial é também chamado de produto externo porque dois vetores, que determinam um plano, definem, como produto externo *um terceiro vetor que lhes é perpendicular, devido aos vetores da Física $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. O módulo do produto vetorial corresponde à área do paralelograma que se pode obter com os dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$, como mostra a figura (fig 7), página 13.*

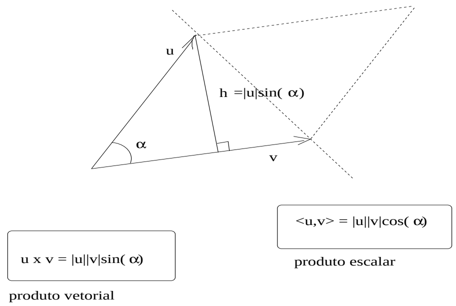

Figura 7: produto vetorial e produto escalar

(a) *(V)[ ](F)[ ] O perímetro do quadrilátero cujos vértices são*

$$P_1 = (-3,-1), P_1 = (0,3), P_1 = (3,4), P_1 = (-5,10) \tag{18}$$

é aproximadamente 29.34261754766732781405.

(b) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos*

$$P_1 = (2,-2), P_2 = (-8,4), P_3 = (5,3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 30

(c) *(V)[ ](F)[ ] Os pontos*

$$P_1 = (2,-2), P_2 = (-8,4), P_3 = (5,3)$$

são os vértices dum triângulo retângulo cuja área vale 68

(d) *(V)[ ](F)[ ] Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é* 5 *é o ponto* $(3,-2)$ *e o outro extremo é o ponto* $(0,-7)$.

(e) *(V)[ ](F)[ ] Um dos extremos dum segmento de reta cujo comprimento é* 5 *é o ponto* $(3,-2)$ *e o outro extremo é o ponto* $(0,-6)$.

A figura (fig 8), página 14, mostra como círculos servem para medir distâncias.

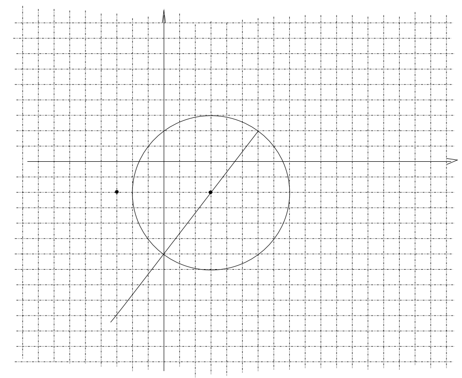

Figura 8: Círculo mede a distância

Referências

[1] Praciano-Pereira Tarcisio. Sobral matemática. Technical report, Sobral Matemática - http://www.sobralmatematica.org, http://www.sobralmatematica.org, 2009.

[2] the free enciclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free enciclopedia in the internet. http://www.wikipedia.org.

[3] David I. Bell Landon Curt Noll and other. Calc - arbitrary precision calculator. Technical report, http://www.isthe.com/chongo/, 2011.

[4] Thomas Williams, Colin Kelley, and many others. gnuplot, software to make graphics. Technical report, http://www.gnuplot.info, 2010.