ALGA	**Lista numero 2**
Equação do círculo	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**

alun@:

31 de março de 2015	**Faculdades INTA**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.geometria.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *Equação do círculo*
objetivo: *Círculos e retas*
palavras chave: círculo, reta, lugar geométrico.

1. *Equação do círculo*

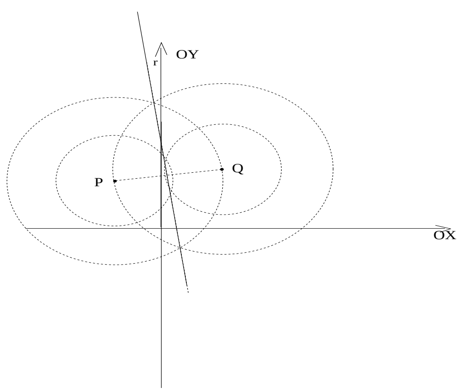


Figura 1: círculos e reta

Dados dois pontos $P = (-3, 4), Q = (4, 5)$ *podemos dizer que*

(a) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo equilátero.*

(b) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo isósceles, mas pode ser um* triângulo isósceles degenerado...

(c) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Quaisquer dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$.*

(d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio.*

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Dois círculos com centros nos pontos P e Q, respectivamente, determinam dois pontos diferentes X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio e se este for maior que $\frac{d(P,Q)}{2}$.*

2. <u>*Equação do círculo*</u> *O símbolo $d(P, Q)$ representa a fórmula*

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2};\ P = (a, b), Q = (p, q); \tag{1}$$

(a) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b), Q = (p, q)$ é*

$$d(X, P) = d(X, Q); \tag{2}$$

(b) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b), Q = (p, q)$ é*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(q-x)^2 + (p-y)^2} \tag{3}$$

(c) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b), Q = (p, q)$ é*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2} \tag{4}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] *Se o ponto* $X = (x, y)$ *for equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$, *então*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \tag{5}$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (q-x)^2 + (p-y)^2 \tag{6}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *Se o ponto* $X = (x, y)$ *for equidistante de dois pontos dados* $P = (a, b), Q = (p, q)$, *então*

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \tag{7}$$
$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2; \tag{8}$$
$$-2ax - 2by = -2px - 2qy; \tag{9}$$
$$(p-a)x = -(q-b)y; \tag{10}$$
$$(p-a)x + (q-b)y = 0; \tag{11}$$

então o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados é uma reta cujo coeficiente angular, se houver, é o negativo do inverso multiplicativo do coeficiente angular da reta que une os dois pontos $P = (a, b), Q = (p, q)$, *se esta reta tiver coeficiente angular.*

3. *Equação do círculo*

(a) (V)[ ](F)[ ] *A reta* r *corta o círculo* $(x-3)^2+(y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* 7.

(b) (V)[ ](F)[ ] *A reta* r *corta o círculo* $(x-3)^2+(y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $\sqrt{7}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] *A reta* r *corta o círculo* $(x-3)^2+(y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(d) (V)[ ](F)[ ] *A reta* r *corta o círculo* $(x-3)^2+(y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $2\sqrt{7}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] *A reta* r *corta o círculo* $(x-3)^2+(y-5)^2 = 7$ *passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é* $\frac{7}{2}$.

4. *Equação do círculo*

(a) *(V)[ ](F)[ ] A reta r tem coeficiente angular* -3 *e passa pelo ponto* $P = (3, 4)$. *A equação da reta r é*

$$y + 4 = -3(x + 3) \tag{12}$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] A reta r tem coeficiente angular* -3 *e passa pelo ponto* $P = (3, 4)$. *A equação da reta r é*

$$y - 4 = 3(x - 3) \tag{13}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] A reta r tem coeficiente angular* -3 *e passa pelo ponto* $P = (3, 4)$. *A equação da reta r é*

$$y - 4 = -3(x - 3) \tag{14}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] A reta r é perpendicular à reta que une os pontos* $P = (-3, 4)$ *e* $Q = (4, 5)$ *e passa pelo ponto* $P = (-3, 4)$. *Sua equação é*

$$m = (5 - 4)/(4 - 3); y - 4 = m(x - 5); \tag{15}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A reta r é perpendicular à reta que une os pontos* $P = (-3, 4)$ *e* $Q = (4, 5)$ *e passa pelo ponto* $P = (-3, 4)$. *Sua equação é*

$$m = -(4 + 3)/(5 - 4); y - 4 = m(x + 3); \tag{16}$$

5. *Equação do círculo*

(a) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3x^2 + 4y^3 - 5 = 0 \tag{17}$$

é uma reta.

(b) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{x - 5}{5} + 4\frac{5}{y} - 5 = 0 \tag{18}$$

é uma reta.

(c) _(V)[ ](F)[ ]_ *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{x-5}{5} - 4\frac{y+7}{x} - 5 = 0 \tag{19}$$

é uma reta de coeficiente angular $\frac{3}{4}$.

(d) _(V)[ ](F)[ ]_ *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{x-5}{5} + 4\frac{y+7}{5} = 0 \tag{20}$$

é uma reta que passa na origem e tem coeficiente angular $-\frac{3}{4}$

(e) _(V)[ ](F)[ ]_ *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$3\frac{(x-5)^2}{5} + 4\frac{(y+7)^2}{10} - 5 = 0 \tag{21}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (5, -7)$.

6. _Equação do círculo_

(a) _(V)[ ](F)[ ]_ *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{22}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{23}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{24}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{25}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{26}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{27}$$

(b) _(V)[ ](F)[ ]_ *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{28}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-3, 5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{29}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{30}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{31}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{32}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{33}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{34}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{35}$$
$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \tag{36}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \tag{37}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{38}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{39}$$

(d) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \tag{40}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \tag{41}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{42}$$
$$x^2 - 2 * 3 * x + 3^2 + y^2 + 2 * 5 * y + 5^2 - 10 = 0; \tag{43}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{44}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = (\sqrt{10})^2; \tag{45}$$
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2; C((a,b), r); \tag{46}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0 \tag{47}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (1, -1)$ *e raio* $\sqrt{2}$

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0; \tag{48}$$
$$5\left(x^2 + y^2 - 2x + 2y+\right) = 0; \tag{49}$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0; \tag{50}$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0; \tag{51}$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 0; \tag{52}$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2; \tag{53}$$

7. *Equação do círculo*

(a) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \tag{54}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (\frac{3}{4}, \frac{-5}{4})$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \tag{55}$$
$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \tag{56}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{57}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{58}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{59}$$

(b) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \tag{60}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ *e raio* $\sqrt{10}$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \tag{61}$$
$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \tag{62}$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \tag{63}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \tag{64}$$
$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{65}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *tais que*

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0 \tag{66}$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0; \tag{67}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y = -10; \tag{68}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 24; \tag{69}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 + 10 = 0; \tag{70}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = -10; \tag{71}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *$y^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ é a equação dum círculo.*

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *$y^2x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ é a equação dum círculo.*

8. *<u>Curva fechada limitada</u>*

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A equação $(x-1)(x+3)y = 0$ descreve uma curva cuja projeção do gráfico cobre o eixo OX.*

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OX é o intervalo* $[-10, 10]$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \tag{72}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \tag{73}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \tag{74}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \tag{75}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{76}$$

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OX é o intervalo*

$$[-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}];$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \tag{77}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \tag{78}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \tag{79}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \tag{80}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{81}$$

   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OY é o intervalo* $[-13, 7]$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \tag{82}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \tag{83}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \tag{84}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \tag{85}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{86}$$

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A equação* $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ *descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo* OY *é o intervalo*

$$[-5 - \sqrt{10}, -5 + \sqrt{10}];$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \tag{87}$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \tag{88}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \tag{89}$$
$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \tag{90}$$
$$(x+3)^2 + (y+5)^2 = 10; \tag{91}$$

9. <u>*Lugar geométrico e sua equação*</u>

   (a) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ *é um círculo de centro na origem.*

   (b) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ *é uma reta,* a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

   (c) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - y^2 = 0$ *é uma reta:* a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

   (d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - y^2 = 0$ *é* a segunda bissetriz dos eixos.

   (e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *O lugar geométrico dos pontos* (x, y) *do plano tal que* $x^2 - y^2 = 0$ *é o conjunto formado pelas* duas bissetrizes dos eixos coordenados.

10. <u>*Equação normal da reta*</u> *Se*

$$Ax + By = 0; \tag{92}$$

então o conjunto dos pontos (x, y) *que satisfizerem à equação (92) é* a reta r, que passa na origem e, é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{(A, B)}$.

Considere os cálculos

$$Ax + By + C = 0; \tag{93}$$
$$r = \sqrt{A^2 + B^2}; \frac{A}{r} = \cos(\alpha); \frac{B}{r} = \sin(\alpha); \tag{94}$$
$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y = 0; \tag{95}$$
$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + \frac{C}{r} = 0; \tag{96}$$

e decida quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

(a) *(V)[ ](F)[ ] Se a reta r tiver coeficiente angular será $-cotg(\alpha)$.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Se $X = (x, y)$ for um ponto genérico sobre a reta r, então o produto escalar*

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \tag{97}$$

mede a projeção do vetor $\vec{X}$ na direção do vetor $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ que é unitário e perpendicular à reta r. Confira a figura (fig 2), página 11.

(c) *(V)[ ](F)[ ] Como para qualquer (x, y) sobre a reta r vale a equação (96), então então o valor constante $|\frac{C}{r}|$ mede a distância da reta $Ax+By+C = 0$ à origem dos eixos cartesianos. Confira a figura (fig 2), página 11.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] A distância da reta $Ax + By + C = 0$ à origem dos eixos cartesianos é $|\frac{C}{r}|$. Confira a figura (fig 2), página 11.*

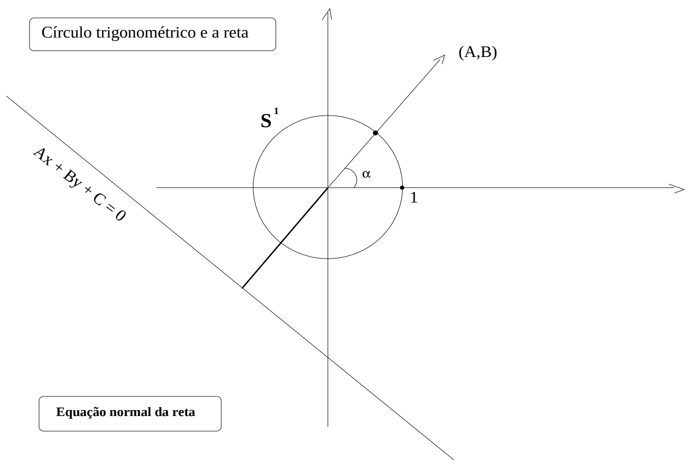
(e) *(V)[ ](F)[ ] A distância da reta $5x + 7y - 13 = 0$ à origem dos eixos coordenados é*

$$\frac{13}{\sqrt{5^2 + 7^2}}; \tag{98}$$

Confira a figura (fig 2), página 11.

Referências

[1] the free enciclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free enciclopedia in the internet. http://www.wikipedia.org.



Círculo trigonométrico e a reta
(A,B)
S¹
α
1
Ax + By + C = 0
Equação normal da reta

Figura 2: