

ALGA

Lista numero 2

Equação do círculo

T. Praciano-Pereira tarcisio.praciano@gmail.com

alun@:

Sobral Matemática

31 de março de 2015

Faculdades INTA

Produzido com L^AT_EX

sis. op. Debian/GNU/Linux

www.geometria.sobralmatematica.org/



Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 Equação do círculo

objetivo: *Círculos e retas*

palavras chave: círculo, reta, lugar geométrico.

1. Equação do círculo

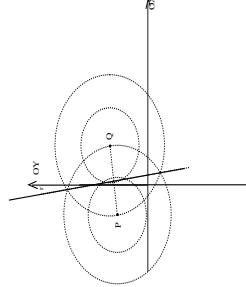


Figura 1: círculos e reta

Dados dois pontos $P = (-3, 4)$, $Q = (4, 5)$ podemos dizer que

(a) (V) [(F)] Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo equilátero.

(b) (V) [(F)] Se o ponto $X = (x, y)$ estiver à mesma distância de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ então os pontos P, Q, X determinam um triângulo isósceles, mas pode ser um triângulo isósceles degenerado. . .

(c) (V) [(F)] Quaisquer dois círculos com centros nos pontos P e Q , respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$.

(d) (V) [(F)] Dois círculos com centros nos pontos P e Q , respectivamente, determinam dois pontos X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio.

(e) (V) [(F)] Dois círculos com centros nos pontos P e Q , respectivamente, determinam dois pontos diferentes X_1, X_2 equidistantes de $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ se tiverem o mesmo raio e se este for maior que $\frac{d(P, Q)}{2}$.

2. Equação do círculo O símbolo $d(P, Q)$ representa a fórmula

$$d(P, Q) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2}; P = (a, b), Q = (p, q); \quad (1)$$

(a) (V) [(F)] A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b)$, $Q = (p, q)$ é

$$d(X, P) = d(X, Q); \quad (2)$$

(b) (V) [(F)] A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b)$, $Q = (p, q)$ é

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(q-x)^2 + (p-y)^2} \quad (3)$$

(c) (V) [(F)] A equação algébrica que expressa que um ponto $X = (x, y)$ é equidistante de dois pontos dados $P = (a, b)$, $Q = (p, q)$ é

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2} \quad (4)$$

(d) $(V) \perp (F) \perp \perp$ Se o ponto $X = (x, y)$ for equidistante de dois pontos dados $P = (a, b), Q = (p, q)$, então

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \quad (5)$$

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2 \quad (6)$$

(e) $(V) \perp (F) \perp \perp$ Se o ponto $X = (x, y)$ for equidistante de dois pontos dados $P = (a, b), Q = (p, q)$, então

$$\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} = \sqrt{(p-x)^2 + (q-y)^2}; \quad (7)$$

$$(a-x)^2 + (b-y)^2 = (p-x)^2 + (q-y)^2; \quad (8)$$

$$-2ax - 2by = -2px - 2qy; \quad (9)$$

$$(p-a)x = -(q-b)y; \quad (10)$$

$$(p-a)x + (q-b)y = 0; \quad (11)$$

então o lugar geométrico dos pontos que equidistam de dois pontos dados é uma reta cujo coeficiente angular, se houver, é o negativo do inverso multiplicativo do coeficiente angular da reta que une os dois pontos $P = (a, b), Q = (p, q)$, se esta reta tiver coeficiente angular.

3. Equação do círculo

(a) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r corta o círculo $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é 7.

(b) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r corta o círculo $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $\sqrt{7}$.

(c) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r corta o círculo $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

(d) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r corta o círculo $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $2\sqrt{7}$.

(e) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r corta o círculo $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 7$ passando pelo centro do mesmo. A distância entre os pontos de interseção da reta com o círculo é $\frac{7}{2}$.

4. Equação do círculo

(a) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P = (3, 4)$. A equação da reta r é

$$y + 4 = -3(x + 3) \quad (12)$$

(b) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P = (3, 4)$. A equação da reta r é

$$y - 4 = 3(x - 3) \quad (13)$$

(c) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r tem coeficiente angular -3 e passa pelo ponto $P = (3, 4)$. A equação da reta r é

$$y - 4 = -3(x - 3) \quad (14)$$

(d) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r é perpendicular à reta que une os pontos $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ e passa pelo ponto $P = (-3, 4)$. Sua equação é

$$m = (5 - 4)/(4 - 3); y - 4 = m(x - 5); \quad (15)$$

(e) $(V) \perp (F) \perp \perp$ A reta r é perpendicular à reta que une os pontos $P = (-3, 4)$ e $Q = (4, 5)$ e passa pelo ponto $P = (-3, 4)$. Sua equação é

$$m = -(4 + 3)/(5 - 4); y - 4 = m(x + 3); \quad (16)$$

5. Equação do círculo

(a) $(V) \perp (F) \perp \perp$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$3x^2 + 4y^3 - 5 = 0 \quad (17)$$

é uma reta.

(b) $(V) \perp (F) \perp \perp$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$3\frac{x-5}{5} + 4\frac{y}{5} - 5 = 0 \quad (18)$$

é uma reta.

(c) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$\frac{3x-5}{5} - 4\frac{y+7}{x} - 5 = 0 \quad (19)$$

é uma reta de coeficiente angular $\frac{3}{4}$.

(d) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$3\frac{x-5}{5} + 4\frac{y+7}{5} = 0 \quad (20)$$

é uma reta que passa na origem e tem coeficiente angular $-\frac{3}{4}$

(e) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$3\frac{(x-5)^2}{5} + 4\frac{(y+7)^2}{10} - 5 = 0 \quad (21)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (5, -7)$.

6. Equação do círculo

(a) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \quad (22)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \quad (23)$$

$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \quad (24)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \quad (25)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \quad (26)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \quad (27)$$

(b) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \quad (28)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-3, 5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \quad (29)$$

$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \quad (30)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \quad (31)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \quad (32)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \quad (33)$$

(c) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \quad (34)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ e raio $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \quad (35)$$

$$x^2 + y^2 - 2 * 3 * x + 2 * 5 * y + 3^2 + 5^2 - 10 = 0; \quad (36)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10 = 0; \quad (37)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \quad (38)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 10; \quad (39)$$

(d) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0 \quad (40)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (-5, 3)$ e raio $\sqrt{10}$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 24 = 0; \quad (41)$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \quad (42)$$

$$x^2 - 2 * 3 * x + 3^2 + y^2 + 2 * 5 * y + 5^2 - 10 = 0; \quad (43)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 - 10 = 0; \quad (44)$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = (\sqrt{10})^2; \quad (45)$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2; C((a, b), r); \quad (46)$$

(e) (V)[][(F)][] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0 \quad (47)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (1, -1)$ e raio $\sqrt{2}$

$$5x^2 + 5y^2 - 10x + 10y = 0; \quad (48)$$

$$5(x^2 + y^2 - 2x + 2y) = 0; \quad (49)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0; \quad (50)$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0; \quad (51)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 - 2 = 0; \quad (52)$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2; \quad (53)$$

7. Equação do círculo

(a) (V) [(F)] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \quad (54)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (\frac{3}{4}, \frac{-5}{4})$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \quad (55)$$

$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \quad (56)$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \quad (57)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 10 = 0; \quad (58)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (59)$$

(b) (V) [(F)] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0 \quad (60)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$ e raio $\sqrt{10}$.

$$4x^2 + 4y^2 - 24x + 40y + 96 = 0; \quad (61)$$

$$4(x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 + 25 - 10) = 0; \quad (62)$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 - 10 = 0; \quad (63)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 - 10 = 0; \quad (64)$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (65)$$

(c) (V) [(F)] O lugar geométrico dos pontos (x, y) tais que

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0 \quad (66)$$

é um círculo de centro no ponto $P = (3, -5)$.

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 10 = 0; \quad (67)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y = -10; \quad (68)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 34 = 24; \quad (69)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 + 10 = 0; \quad (70)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = -10; \quad (71)$$

(d) (V) [(F)] $x^2 - 9x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ é a equação dum círculo.

(e) (V) [(F)] $y^2 x^2 - 18x - 8y - 2 = 0$ é a equação dum círculo.

8. Curva fechada limitada

(a) (V) [(F)] A equação $(x - 1)(x + 3)y = 0$ descreve uma curva cuja projeção do gráfico cobre o eixo OX .

(b) (V) [(F)] A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OX é o intervalo $[-10, 10]$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \quad (72)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \quad (73)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \quad (74)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \quad (75)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (76)$$

(c) (V) [(F)] A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OX é o intervalo

$$[-3 - \sqrt{10}, -3 + \sqrt{10}];$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \quad (77)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \quad (78)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \quad (79)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \quad (80)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (81)$$

(d) (V) [(F)] A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OY é o intervalo $[-13, 7]$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \quad (82)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \quad (83)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \quad (84)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \quad (85)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (86)$$

(e) $(V)[[F]][[]]$ A equação $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$ descreve uma curva cuja projeção sobre o eixo OY é o intervalo

$$[-5 - \sqrt{10}, -5 + \sqrt{10}];$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y - 10 = 0; \quad (87)$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 - 34 = 10; \quad (88)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y = 10; \quad (89)$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 10y + 9 + 25 - 34 - 10 = 0; \quad (90)$$

$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 10; \quad (91)$$

9. Lugar geométrico e sua equação

(a) $(V)[[F]][[]]$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ é um círculo de centro na origem.

(b) $(V)[[F]][[]]$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ é uma reta, a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

(c) $(V)[[F]][[]]$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2 - y^2 = 0$ é uma reta: a primeira bissetriz dos eixos coordenados.

(d) $(V)[[F]][[]]$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2 - y^2 = 0$ é a segunda bissetriz dos eixos.

(e) $(V)[[F]][[]]$ O lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano tal que $x^2 - y^2 = 0$ é o conjunto formado pelas duas bissetrizes dos eixos coordenados.

10. Equação normal da reta

$$Ax + By = 0; \quad (92)$$

então o conjunto dos pontos (x, y) que satisfizerem à equação (92) é a reta r , que passa na origem e, é perpendicular ao vetor (A, B) .

Considere os cálculos

$$Ax + By + C = 0; \quad (93)$$

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}; \frac{A}{r} = \cos(\alpha); \frac{B}{r} = \sin(\alpha); \quad (94)$$

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y = 0; \quad (95)$$

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y + \frac{C}{r} = 0; \quad (96)$$

e decida quais das afirmações seguintes são verdadeiras.

(a) $(V)[[F]][[]]$ Se a reta r tiver coeficiente angular será $-\cotg(\alpha)$.

(b) $(V)[[F]][[]]$ Se $X = (x, y)$ for um ponto genérico sobre a reta r , então o produto escalar

$$\cos(\alpha)x + \sin(\alpha)y \quad (97)$$

mede a projeção do vetor \vec{X} na direção do vetor $(\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ que é unitário e perpendicular à reta r . Confira a figura (fig 2), página 11.

(c) $(V)[[F]][[]]$ Como para qualquer (x, y) sobre a reta r vale a equação (96), então então o valor constante $|\frac{C}{r}|$ mede a distância da reta $Ax + By + C = 0$ à origem dos eixos cartesianos. Confira a figura (fig 2), página 11.

(d) $(V)[[F]][[]]$ A distância da reta $Ax + By + C = 0$ à origem dos eixos cartesianos é $|\frac{C}{r}|$. Confira a figura (fig 2), página 11.

(e) $(V)[[F]][[]]$ A distância da reta $5x + 7y - 13 = 0$ à origem dos eixos coordenados é

$$\frac{13}{\sqrt{5^2 + 7^2}}; \quad (98)$$

Confira a figura (fig 2), página 11.

Referências

[1] the free encyclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free encyclopedia in the internet. <http://www.wikipedia.org>.

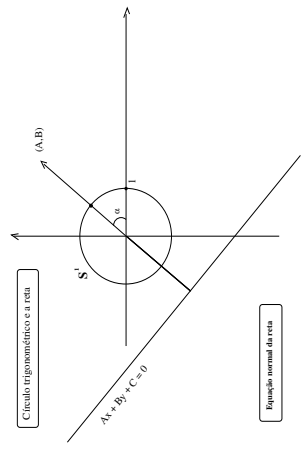


Figura 2: