ALGA	**Lista 3**
Reta	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Física**
alun@:	
25 de maio de 2015	**Univ. Estadual Vale do Acaraú**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.geometria.sobralmatematica.org/

Observação 1 *Uma das soluções contém um erro*

Atenção A solução do exercício 10 contém um erro que não consegui corrigir. Agradeceria se alguém mostrasse qual é o erro.

O erro está devidamente documentado.

Exercícios 1 *Reta*
Objetivo: *as retas e suas equações*
palavras chave: equação cartesiana da reta, equação paramétrica da reta, equação vetorial da reta.

1. **Equação da reta A reta r passa nos pontos $P = (-4, 5)$ e $Q = (3, 1)$.**

   (a) **(V)[ ](F)[ ] A reta r é decrescente e o seu coeficiente angular é $-\frac{4}{7}$**

   (b) **(V)[ ](F)[ ] A equação cartesiana de r é**

$$P = (a, b) = (-4, 5); Q = (p, q) = (3, 1); X = (x, y); \tag{1}$$
$$\frac{b-q}{a-p} = \frac{y-q}{x-p}; \tag{2}$$
$$(b - q)(x - p) = (a - p)(y - q); \tag{3}$$
$$(5 - 1)(x - 3) = (-4 - 3)(y - 1); \tag{4}$$
$$4(x - 3) = -7(y - 1); 4x - 12 = -7y + 7; \tag{5}$$
$$4x + 7y - 19 = 0; \tag{6}$$

   na equação (6) você pode ver a equação cartesiana da reta r.

   (c) **(V)[ ](F)[ ] O ponto $(0, \frac{19}{7}) \in r$;**

   (d) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular de r é $m = \frac{-4}{7}$;**

   (e) **(V)[ ](F)[ ] A reta corta o eixo OY acima do eixo OX, (na semireta positiva do eixo OY).**

2. **Equação da reta**

   A equação da *reta* r é

$$3x - 5y + 2 = 0;$$

   (a) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular da *reta* r é $\frac{3}{5}$.**

   (b) **(V)[ ](F)[ ] A *reta* r passa no ponto $(0, 4/10)$.**

   (c) **(V)[ ](F)[ ] O ponto $(10, 32/5)$ pertence a *reta* r.**

   (d) **(V)[ ](F)[ ] O coeficiente linear da *reta* r é $\frac{4}{10}$**

(e) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular da ***reta*** r é $\frac{1}{2}$

3. Equação vetorial da reta

A ***reta*** r tem a mesma direção do vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(3,4)}$ e passa pelo ponto $(-3,7)$.

(a) (V)[ ](F)[ ] A equação vetorial da ***reta*** r

$$X = (x(t), y(t)) = \overrightarrow{(-3,7)} + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{7}$$

$$\begin{cases} x(t) = -3 + 3t; \\ y(t) = 7 + 4t; \end{cases} \tag{8}$$

está apresentada na equação (7) como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{(-3,7)}, \vec{u}$.

(b) (V)[ ](F)[ ] O conjunto

$$U = \{(-12,-5), (-6,3), (-3,7), (0,11), (6,19)\} \subset r;$$

é um subconjunto de pontos da ***reta*** r.

(c) (V)[ ](F)[ ] Os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{(4,-3)}, \vec{v} = \overrightarrow{(3,4)}$ são perpendiculares;

(d) (V)[ ](F)[ ] A ***reta*** s tem a mesma direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(3,4)}$ e passa pelo ponto $(-3,7)$. A equação vetorial da reta s

$$X_2 = (x_2(t), y_2(t)) = \overrightarrow{(-3,7)} + t\vec{v}; t \in \mathbf{R}; \tag{9}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -3 + 4t; \\ y_2(t) = 7 - 3t; \end{cases} \tag{10}$$

está apresentada na equação (9) como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{(-3,7)}, \vec{v}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] Confira a figura (fig 1), página 4. As ***retas*** r, s são perpendiculares e passam pelo ponto $(-3,7)$.

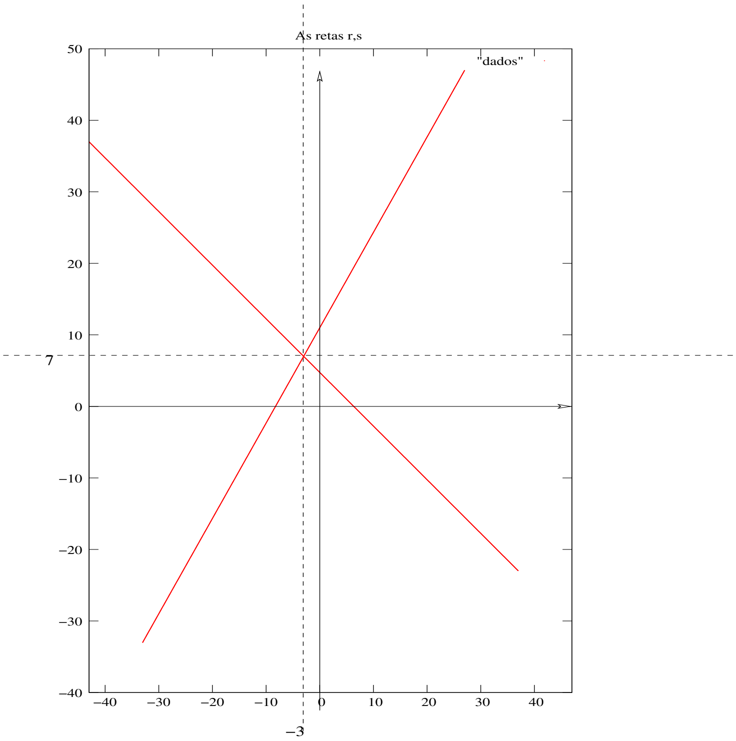


Figura 1: Retas r, s

$$\textbf{a reta } r: \quad X_1 = (x_1(t), y_1(t)) = \overrightarrow{(-3,7)} + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{11}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -3 + 3t; \\ y_1(t) = 7 + 4t; \end{cases} \tag{12}$$

$$\textbf{a reta } s: \quad X_2 = (x_2(t), y_2(t)) = \overrightarrow{(-3,7)} + t\vec{v}; t \in \mathbf{R}; \tag{13}$$

$$\begin{cases} x_2(t) = -3 + 4t; \\ y_2(t) = 7 - 3t; \end{cases} \tag{14}$$

4. Cosenos diretores duma reta

Observação 2 ***Cosenos diretores duma reta***

***As retas paralelas ao eixo OY não tem* coeficiente angular *o que mostra que este conceito é limitado. A solução são os chamados* cosenos diretores *que produzem a* equação polar da reta.**

A* reta *r é paralela ao vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(a,b)}$ e passa pelo ponto $P = (p,q)$. Ela é também paralela ao vetor unitário da direção do vetor $\vec{u}$ que é o vetor

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha));$$

α é o ângulo entre o vetor $\vec{u}$ e o eixo OX.

$$\vec{n} = \begin{cases} \cos(\alpha) = \frac{a}{|\vec{u}|}; \\ \sin(\alpha) = \frac{b}{|\vec{u}|}; \end{cases} \tag{15}$$

$$X = \vec{P} + t\vec{n}; \tag{16}$$

$$X = \vec{P} + t\left(\cos(\alpha), \sin(\alpha)\right); t \in \mathbf{R}; \tag{17}$$

X é um* vetor posição [1] *sobre a reta, um ponto genérico sobre a reta. Confira a figura (fig 2), página 5, as coordenadas de X são determinadas

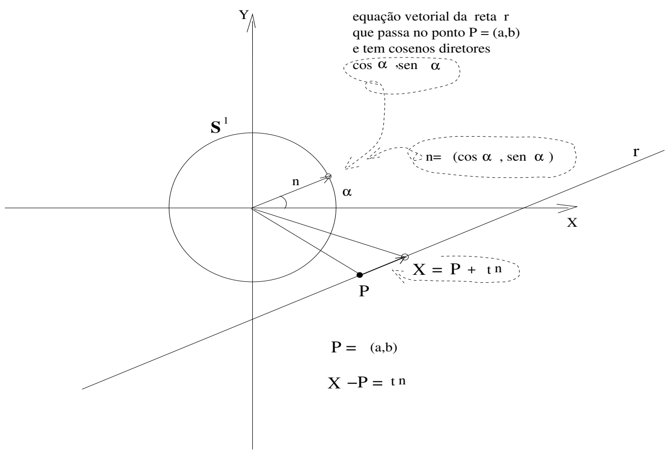


Figura 2: equação vetorial da reta: cosenos diretores

como um múltiplo dos* cosenos diretores *da reta somados ao vetor P por onde a reta passa, confira a equação (16), detalhada na equação (17).

A generalização desta equação para retas num espaço de dimensão $n \geq 2$ é pura questão de aumentar o número de coordenadas e agora sim a expressão* cosenos diretores *aquirem o seu sentido mais completo.

Dado um vetor $\vec{u} \in \mathbf{R}^n$, a divisão pelo número $|\vec{u}|$ produz um vetor da esfera unitária do $\mathbf{R}^n$ que é designada com o símbolo, $\mathbf{S}^{n-1}$ indicando

[1]Há um vício de notação contrariando um hábito estabelecido, o símbolo $\vec{n}$ é reservado para o *vetor normal a uma variedade* sendo impróprio o uso deste símbolo aqui.

que se trata duma variedade de dimensão $n-1$ ***do espaço*** $\mathbf{R}^n$***, é uma generalização do* círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$*, e um ponto qualquer*** $X \in \mathbf{S}^{n-1}$ ***satisfaz à identidade fundamental da trigonometria***

$$X = (x_1, \dots, x_n); \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = 1; \tag{18}$$

e como temos apenas dois nomes para as funções trigonométricas fundamentais, fruto de nossa prisão tridimensional, a saída é chamá-las todas as coordenadas de "$\cos$***", como algumas vezes fazemos no plano designando***

$$\sin(\alpha) = \cos(\alpha_2); \alpha + \alpha_2 = \tfrac{\pi}{2}; \tag{19}$$
$$X = (\cos(\alpha_1, \cos(\alpha_2) \in \mathbf{S}^1; \alpha_1 + \alpha_2 = \tfrac{\pi}{2}; \tag{20}$$

No caso dum ponto genérico P ***sobre uma reta, usando o axioma da paralelas da geometria euclidiana, fica determinado de forma única um vetor paralelo a*** P ***sobre a esfera unitária*** $\mathbf{S}^{n-1}$

$$X \in \mathbf{S}^{n-1}; \tag{21}$$
$$X = (\cos(\alpha_1, \cos(\alpha_2, \dots, \cos(\alpha_n)) ; \sum_{k=1}^{n} \cos(\alpha_k)^2 = 1; \tag{22}$$

Para determinar os ângulos $\alpha_1, \dots \alpha_n$

- ***vamos sucessivamente cortando*** $\mathbf{S}^{n-1}$ ***com planos perpendiculares.***
- ***no primeiro selecionamos a direção*** OX_1 ***e determinamos*** α_1 ***como o ângulo que a projeção de*** X ***fizer com*** OX***.***
- ***se a selecionarmos*** OX_1 ***como a direção de*** X ***o processo está terminado!***
- ***selecionamos a direção que for perpendicular a*** OX_1 ***chamada*** OX_2 ***e calculamos a projeção de*** X ***nesta direção encontrando*** $\cos(\alpha_2$ ***e assim sucessivamente até encontrarmos*** $\cos(\alpha_n$***.***

Este processo está perfeitamente descrito no algoritmo de Gram–Schmidt para ortonormalização dum vetor cuja apresentação informal está feita na sucessão de passos acima. Aceite como válido este processo na resolução desta lista.

A *reta* r é paralela ao vetor $\vec{u} =\overrightarrow{(1,2)}$ e passa pelo ponto $P = (-1,1)$.

(a) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **A equação polar (vetorial) da *reta* r é**

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+4}}; \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{1+4}}; \vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \tag{23}$$

$$X = (x_1(t), x_2(t)) = (-\vec{1}, 1) + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{24}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -1 + t; \\ x_2(t) = 1 + t; \\ x_3(t) = 3 + 3t; \end{cases} \tag{25}$$

(b) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **A equação polar (vetorial) da *reta* r é**

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}; \sin(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}; \vec{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha)) \tag{26}$$

$$X = (x_1(t), x_2(t)) =\overrightarrow{(-1, 1)} + t\vec{u}; t \in \mathbf{R}; \tag{27}$$

$$\begin{cases} x_1(t) = -1 + t\cos(\alpha); \\ x_2(t) = 1 + t\sin(\alpha); \end{cases} \tag{28}$$

(c) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **O vetor $\overrightarrow{v} =\overrightarrow{(2,1)}$ é perpendicular ao vetor $\overrightarrow{u} =\overrightarrow{(1,2)}$.**

(d) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **O vetor $\vec{v} =\overrightarrow{(-2,1)}$ é perpendicular ao vetor $\vec{u} =\overrightarrow{(1,2)}$.**

(e) <u>**(V)[ ](F)[ ]**</u> **A reta s definida por**

$$\vec{v} =\overrightarrow{(-2, 1)}; |\vec{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}; \tag{29}$$

$$\beta = Acos(\tfrac{-2}{\sqrt{5}});\ \cos(\beta) = \tfrac{-2}{|\vec{v}|};\ \sin(\beta) = \tfrac{1}{|\vec{v}|}; \tag{30}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$s \ni X = \vec{P} + t\vec{n} = \vec{P} + t\left(\cos(\beta), \sin(\beta)\right); t \in \mathbf{R}; \tag{32}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + t\cos(\beta) \\ 1 + t\sin(\beta) \end{pmatrix}; \tag{33}$$

é perpendicular à reta r definida nas equações (27) e (28).

5. **<u>Equação vetorial da reta no espaço</u> É dada a reta, r que passa no ponto $P; P = (1, -2, 3)$ e é paralela ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(1, 1, 1)}$.**

$$P \in r;$$

   (a) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u> A equação polar (vetorial) da reta r é deduzida dos seguintes cálculos**

$$r = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}; \tag{34}$$
$$\cos(\alpha_1) = \tfrac{1}{r}; \cos(\alpha_2) = \tfrac{-2}{r}; \cos(\alpha_3) = \tfrac{3}{r}; \tag{35}$$
$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = \tag{36}$$
$$(\tfrac{1}{\sqrt{14}})^2 + (\tfrac{-2}{\sqrt{14}})^2 + (\tfrac{3}{\sqrt{14}})^2 == \tfrac{1+4+9}{(\sqrt{14})^2} = 1; \tag{37}$$
$$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \overrightarrow{(1, -2, 3)} + t\vec{n}; t \in \mathbf{R}; \tag{38}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{pmatrix} \tag{39}$$

   está apresentada nas equações (38) e (39) mostrando a reta r como um vetor cujas coordenadas são variáveis e dependem do parâmetro $t \in \mathbf{R}$.

   (b) **<u>(V)[ ](F)[ ]</u> A equação polar (vetorial) da reta r é deduzida dos seguintes cálculos**

$$\cos(\alpha_1) = \tfrac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \cos(\alpha_2) = \cos(\alpha_3); \tag{40}$$
$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = \tag{41}$$
$$= (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 = \tfrac{1+1+1}{(\sqrt{3})^2} = 1; \tag{42}$$
$$\vec{n} = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)); \tag{43}$$
$$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \overrightarrow{(1, -2, 3)} + t\vec{n}; t \in \mathbf{R}; \tag{44}$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{pmatrix} \tag{45}$$

   A equação polar (vetorial) da reta r está apresentada na equações (44) e (45) mostrando a reta r como um vetor cujas coordenadas são variáveis e dependem de $t \in \mathbf{R}$.

A figura (fig 3), página 37, mostra o gráfico feito com `gnuplot` da reta r sob duas perspectivas diferentes. Rodando `gnuplot` é possível dar rotações no gráfico para uma melhor visão dos objetos.

(c) **(V)[ ](F)[ ] Aplicando a regra do paralelogramo podemos concluir que o vetor $\overrightarrow{Q}$ obtido com os calculos feitos a seguir**

$$\cos(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(\alpha_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (46)$$
$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = \quad (47)$$
$$= (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1+1+1}{(\sqrt{3})^2} = 1; \quad (48)$$
$$\overrightarrow{Q} = (1 + \cos(\alpha_1), -2 + \cos(\alpha_2), 3 + \cos(\alpha_3)); \quad (49)$$

é uma translação do vetor unitário

$$(\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)) \quad (50)$$

para a posição determinada pelo vetor $\overrightarrow{P} = (1, \overrightarrow{-2}, 3)$ descrevendo um segmento de reta de tamanho 1 perpendicular a reta r.

(d) **(V)[ ](F)[ ] Aplicando a regra do paralelogramo podemos concluir que o vetor**

$$\cos(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(\alpha_3) = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (51)$$
$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = \quad (52)$$
$$= (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{3}})^2 = \frac{1+1+1}{(\sqrt{3})^2} = 1; \quad (53)$$
$$\overrightarrow{Q} = (1 + \cos(\alpha_1), -2 + \cos(\alpha_2), 3 + \cos(\alpha_3)); \quad (54)$$

é uma translação do vetor unitário

$$(\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)) \quad (55)$$

para a posição determinada pelo vetor $\vec{P} = (1, \overrightarrow{-2}, 3)$ descrevendo um segmento de reta unitário sobre a reta r.

(e) **(V)[ ](F)[ ]Fazendo $t = 3$ encontramos o ponto $X_0 \in r$**

$$\alpha_1 = Acos(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \alpha_2 = \alpha_3; \tag{56}$$

$$X_0 = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \overrightarrow{(1,-2,3)} + 3\vec{n}; \tag{57}$$

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{pmatrix} \tag{58}$$

6. **Retas no espaço São dadas duas retas, r, s que se interceptam no ponto $P = (1, -2, 3)$, $P = (1, -2, 3) \in r \cap s$.**

A reta r é paralela ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1,1)}$ e a reta s é perpendicular ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1,1)}$.

$$\begin{cases} P \in r \cap s; \\ s \perp \vec{v}; \\ r \approx \vec{v}; \end{cases} \tag{59}$$

(a) **(V)[ ](F)[ ] As retas r, s são paralelas, e como têm um ponto em comum, são idênticas.**

(b) **(V)[ ](F)[ ] As retas r, s são perpendiculares e passam pelo ponto $P = (1, -2, 3)$.**

(c) **(V)[ ](F)[ ] O vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(1,1,-2)}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(1,1,1)}$.**

(d) **(V)[ ](F)[ ] A equação vetorial da reta s se deduz dos cálculos**

$$\cos(\alpha_1) = \frac{1}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos(\alpha_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}; \cos(\alpha_3) = \frac{-2}{\sqrt{6}}; \tag{60}$$

$$\vec{p} = (\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)); \tag{61}$$

$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = \tag{62}$$

$$= |\vec{p}| = (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{4}{\sqrt{6}})^2 = \frac{1+1+4}{(\sqrt{6})^2} = 1; \tag{63}$$

$$X = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \overrightarrow{(1,-2,3)} + t\vec{p}; t \in \mathbf{R}; \tag{64}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \\ \cos(\alpha_2) \\ \cos(\alpha_3) \end{pmatrix} \tag{65}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se X for um vetor genérico da reta s dado pela equação (65) então $X - P; P = (1, -2, 3)$ é um ponto genérico duma reta que passa na origem e é perpendicular ao vetor $\vec{v}$.

7. Retas no espaço, equação e distância

A reta r é paralela ao vetor $\vec{v} = \overrightarrow{(-2, 3, -5)}$ e passa no ponto $P = (1, 2, 3)$.

(a) (V)[ ](F)[ ] O vetor $\vec{u} = \overrightarrow{(-5, 0, 2)}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v}$.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se

$$(\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_3)) = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

então a reta s, com estes cosenos, diretores será perpendicular ao vetor $\vec{v}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $|\vec{u}| = 1$ então a distância do ponto Q à reta $P + tu$ é dada pelo módulo do produto vetorial $u \times Q - P$.

(d) (V)[ ](F)[ ] O ponto $P = (-3, 2, 7)$ não pertence à reta paralela ao vetor $\overrightarrow{(3, 2, 5)}$ passando pelo ponto $Q = (7, 2, 9)$. Confira a figura (fig 4), página 38,

(e) (V)[ ](F)[ ] A reta s é paralela à reta r e passa pelo ponto $P = (-1, 2, -3)$. A equação vetorial da reta s é

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}; t \in \mathbf{R}; \tag{66}$$

$$X = P + t\vec{v}; \tag{67}$$

8. Retas, equação e distância Dois herdeiros receberam pela morte do pai uma quinta delimitada pelas retas

$$\begin{cases} 2x + 3y - 9 = 0 \\ -3x + y - 4 = 0 \\ x - 4y - 12 = 0 \end{cases} \tag{68}$$

em que os coeficientes, nas equações, representam medidas em quilômetro. Confira o gráfico na figura (fig 5), página 38.

(a) **(V)[ ](F)[ ] As três retas se interceptam, duas a duas, determinando os vértices O, P, Q dum triângulo.**

$$O = (\tfrac{3}{11}, \tfrac{35}{11}) \approx (0.2727273, 3.1818182); \tag{69}$$
$$P = (\tfrac{28}{11}, \tfrac{40}{11}) \approx (2.5454545, 3.6363636); \tag{70}$$
$$Q = (\tfrac{72}{11}, -\tfrac{15}{11}) \approx (6.5454545, -1.3636364); \tag{71}$$

(b) **(V)[ ](F)[ ] As três retas se interceptam, duas a duas, determinando os vértices O, P, Q dum triângulo.**

$$O = (\tfrac{3}{11}, \tfrac{35}{11}) \approx (0.2727273, 3.1818182); \tag{72}$$
$$P = (\tfrac{28}{11}, -\tfrac{40}{11}) \approx (2.5454545, -3.6363636); \tag{73}$$
$$Q = (\tfrac{72}{11}, -\tfrac{15}{11}) \approx (6.5454545, -1.3636364); \tag{74}$$

(c) **(V)[ ](F)[ ] As três retas se interceptam, duas a duas, determinando os vértices O, P, Q dum triângulo.**

$$O = (\tfrac{3}{11}, \tfrac{35}{11}) \approx (0.2727273, 3.1818182); \tag{75}$$
$$P = (-\tfrac{28}{11}, -\tfrac{40}{11}) \approx (-2.5454545, -3.6363636); \tag{76}$$
$$Q = (\tfrac{72}{11}, -\tfrac{15}{11}) \approx (6.5454545, -1.3636364); \tag{77}$$

(d) **(V)[ ](F)[ ] As três retas se interceptam, duas a duas, determinando os vértices O, P, Q dum triângulo.**

$$O = (-\tfrac{3}{11}, \tfrac{35}{11}) \approx (-0.2727273, 3.1818182); \tag{78}$$
$$P = (-\tfrac{28}{11}, -\tfrac{40}{11}) \approx (-2.5454545, -3.6363636); \tag{79}$$
$$Q = (\tfrac{72}{11}, -\tfrac{15}{11}) \approx (6.5454545, -1.3636364); \tag{80}$$

(e) **(V)[ ](F)[ ] A área total da quinta a ser dividida é $\frac{5^2}{\sqrt{10}}$ quilômetros quadrados.**

Solução 1

$$\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ -3x+y-4=0 \end{cases} \tag{81}$$

$$\begin{cases} 6x+9y-27=0 \\ -6x+2y-8=0 \end{cases} \tag{82}$$

$$\begin{cases} 11y-35=0; y=\frac{35}{11} \\ 2x+3y-9=2x+\frac{105}{11}-9=0 x=\frac{-105+99}{22}=-\frac{6}{22}=-\frac{3}{11}; \end{cases} \tag{83}$$

$$O=(-\tfrac{3}{11},\tfrac{35}{11})\approx(-0.2727273, 3.1818182); \tag{84}$$

$$\begin{cases} -3x+y-4=0 \\ x-4y-12=0 \end{cases} \tag{85}$$

$$\begin{cases} -3x+y-4=0 \\ 3x-12y-36=0 \end{cases} \tag{86}$$

$$\begin{cases} -11y-40=0; y=-\frac{40}{11}; \\ x-4y-12=0 \Rightarrow x+\frac{160}{11}-12=0 \Rightarrow x=\frac{-160+132}{11}=-\frac{28}{11}; \end{cases} \tag{87}$$

$$P=(-\tfrac{28}{11},-\tfrac{40}{11})\approx(-2.5454545,-3.6363636); \tag{88}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ x-4y-12=0 \end{cases} \tag{89}$$

$$\begin{cases} 2x+3y-9=0 \\ -2x+8y+24=0 \end{cases} \tag{90}$$

$$\begin{cases} 11y+15=0 \Rightarrow y=-\frac{15}{11}; \\ x-4y-12=0; \\ x+\frac{60}{11}-12=0 \Rightarrow x=\frac{132-60}{11}=\frac{72}{11} \end{cases} \tag{91}$$

$$Q=(\tfrac{72}{11},-\tfrac{15}{11})\approx(6.5454545,-1.3636364); \tag{92}$$

$$O=(-\tfrac{3}{11},\tfrac{35}{11});\ P=(-\tfrac{28}{11},-\tfrac{40}{11});\ Q=(\tfrac{72}{11},-\tfrac{15}{11}); \tag{93}$$

$$\overrightarrow{OP}=(-\tfrac{25}{11},-\tfrac{75}{11}); \tag{94}$$

$$\overrightarrow{OQ}=(\tfrac{75}{11},-\tfrac{50}{11}); \tag{95}$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ -\frac{25}{11} & -\frac{75}{11} & 0 \\ \frac{75}{11} & -\frac{50}{11} & 0 \end{bmatrix}=\frac{\vec{k}}{11^2}(1250+5625)= \tag{96}$$

$$\frac{6875}{11^2}\vec{k}=56.818182\ldots \tag{97}$$

A área do triângulo é **a metade do módulo do valor do de-**

terminante, ***porque*** ***o valor do determinante é a área do losângulo de lados paralelos determinado pelos vetores*** $\overrightarrow{OP}$ $,\overrightarrow{OQ}$***.***

$$\textbf{\textit{área}} = \frac{1}{2}\frac{6875}{11^2} \tag{98}$$

Esta é a definição geométrica do produto vetorial ***de dois vetores:***

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \parallel \overrightarrow{OP} \parallel\parallel \overrightarrow{OQ} \parallel \sin(\alpha);$$

em que α ***é o ângulo entre os vetores. Qualquer dos produtos*** $\parallel \overrightarrow{OQ} \parallel \sin(\alpha)$ ***ou*** $\parallel \overrightarrow{OP} \parallel \sin(\alpha)$ ***produz a altura do losângulo relativamente ao lado que está faltando nestas multiplicações. O resultado é área do losângulo então a área de qualquer um dos dois triângulos semelhantes é a metade do produto vetorial dos lados.***

Na figura (fig 5), página 38, você pode ver o triângulo determinado pelas retas. Confirmados os resultados com `scilab` ***usando***

- `x = linsolve(A,b);` ***para resolver os três sistema de equação e encontrar os pontos*** O, P, Q***,***
- ***e depois, calculando o determinante da matriz*** S ***definida como***

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\frac{25}{11} & -\frac{75}{11} & 0 \\ \frac{75}{11} & -\frac{50}{11} & 0 \end{bmatrix} \tag{99}$$

com a linha $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ***em lugar de*** $\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}$ ***e calculando a função*** `det(S)` ***no terminal do*** `scilab`***.***

A sessão do `scilab`***:***

```
A = [2,3;-3,1];
b = [-9;-4];
O = linsolve(A,b);
O = (- 0.2727273 ,  3.1818182)   (editado)
A = [-3,1;1,-4]; b = [-4;-12];
```

```
P = linsolve(A,b);
P  =  (- 2.5454545, - 3.6363636)   (editado)
A=[2,3;1,-4]; b = [-9;-12];
Q = linsolve(A,b);
Q  =  ( 6.5454545, - 1.3636364)   (editado)
S = [1,1,1; -25/11,-75/11,0;75/11, -50/11,0 ]
S  =

    1.            1.            1.
  - 2.2727273   - 6.8181818     0.
    6.8181818   - 4.5454545     0.
det(S)
ans  =

    56.818182
```

Usando determinantes

Vou mostrar o uso de determinante para resolver sistemas lineares. Para isto considere um sistema com coeficientes

literais:

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by & = & c \\ px+qy & = & d \end{array}\right. \tag{100}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -p(ax+by) & = & -pc \\ a(px+qy) & = & ad \end{array}\right. \tag{101}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -pax-pby & = & -pc \\ pax+qay & = & ad \end{array}\right. \tag{102}$$

$$(qa-pb)y = ad-pc \;\;\Rightarrow\;\; y=\tfrac{ad-pc}{qa-pb}; \tag{103}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -q(ax+by) & = & -qc \\ b(px+qy) & = & bd \end{array}\right. \tag{104}$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} -qax-qby & = & -qc \\ bpx+qby & = & bd \end{array}\right. \tag{105}$$

$$(-qa+bp)x = bd-qc \;\;\Rightarrow\;\; x=\tfrac{bd-qc}{-qa+bp}=\tfrac{qc-bd}{qa-bp} \tag{106}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ d & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=\tfrac{\Delta_x}{\Delta};\;\; y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ p & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ p & q \end{vmatrix}}=\tfrac{\Delta_y}{\Delta} \tag{107}$$

E você pode ver que o método consiste em calcular o valor de x com uma fração em que no denominador aparece o determinante Δ do sistema de equações e no numerador aparece um determinante em que substituimos a coluna dos coeficientes de x pelos termos independentes, este determinante é chamado de Δ_x. De forma análoga, calculamos o valor de y com uma fração em que no denominador aparece o determinante Δ do sistema de equações e no numerador aparece um determinante em que substituimos a coluna dos coeficientes de y pelos termos independentes, este determinante chamado de Δ_y, é o que está expresso na equação (107).

---

9. Interseção de retas, equação vetorial da reta

São dadas duas retas

$$r_1 \ : X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P + t\vec{u}; \begin{cases} x = p_1 + tu_1 \\ y = p_2 + tu_2 \end{cases}; \quad (108)$$

$$r_2 \ : X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q + t\vec{v}; \begin{cases} x = q_1 + tv_1 \\ y = q_2 + tv_2 \end{cases}; \quad (109)$$

(a) **(V)[ ](F)[ ] A interseção das duas retas, r_1, r_2 que passam, respectivamente, nos pontos $P = (-5, 7)$ e $Q = (8, 9)$, cujas direções são dadas, respectivamente, pelos vetores, $\vec{u} = \overrightarrow{(3, 4)}, \vec{v} = \overrightarrow{(7, 8)}$ respectivamene, é representada pelo sistema de equações**

$$\begin{cases} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{cases} = \begin{cases} x = 8 + 3t; \\ y = 9 + 4t; \\ x = 10 + 7s; \\ y = 11 + 8s; \end{cases} \quad (110)$$

(b) **(V)[ ](F)[ ] A interseção das duas retas, r_1, r_2 que passam, respectivamente, nos pontos $P = (-5, 7)$ e $Q = (8, 9)$, cujas direções são dadas pelos vetores, $\vec{u} = \overrightarrow{(-1, 1)}, \vec{v} = \overrightarrow{(1, 1)}$ respectivamene, é representada pelo sistema de equações**

$$\begin{cases} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{cases} = \begin{cases} x = -5 - t; \\ y = 7 + t; \\ x = 8 + s; \\ y = 9 + s; \end{cases} \quad (111)$$

(c) **(V)[ ](F)[ ] As retas representadas pelo sistema de equações abaixo são paralelas.**

$$\begin{cases} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{cases} = \begin{cases} x = 5 - 2t; \\ y = 7 + 2t; \\ x = 8 - s; \\ y = 9 + s; \end{cases} \quad (112)$$

(d) **(V)[ ](F)[ ] As retas representadas pelo sistema de equações abaixo são paralelas.**

$$\left\{\begin{array}{l} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x = 5 - t; \\ y = 7 + t; \\ x = 8 - s; \\ y = 9 + s; \end{array}\right. \tag{113}$$

(e) **(V)[ ](F)[ ] As retas representadas pelo sistema de equações abaixo são concorrentes e a interseção entre elas é um ponto diferente tanto de $P = (5, 7)$ como $Q = (15, -7)$**

$$\left\{\begin{array}{l} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} x = 5 - t; \\ y = 7 + t; \\ x = 15 + s; \\ y = -7 - s; \end{array}\right. \tag{114}$$

Solução 2 ***Este texto*** **não é uma solução*****, ele contém as informações teóricas que lhe podem dar apoio na solução dos itens.***

A interseção de duas retas é representada pelo sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} P + t\vec{u}; \\ Q + s\vec{v}; \end{array}\right. ; \tag{115}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{array}\right. \tag{116}$$

Os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são os vetores que dão direção às retas r_1, r_2, respectivamene. No sistema de equações (115), eu usei dois parametros para representar **tempo*****, s, t porque o*** **movimento** ***sobre as retas não precisa estar sincronizado, em outras palavras, num determinado momento do tempo t podemos ter distintos pontos sobre cada uma das retas. Resolver o sistema representa, portanto, encontrar os valores de s, t que correspondam a um ponto comum sobre as retas.***

Num **espaço** ***de dimensão maior ou igual três, as duas retas podem ter mesma direção, e serem paralelas, ou direções***

diferentes e então podem ser concorrentes *ou* reversas. ***Estas duas opções criam as seguintes combinações,*** numa análise geométrica*:*

- ***mesma direção*** ***consequentemente o determinante***

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{117}$$

  - ***passam no mesmo ponto:*** $P = Q$, ***são coincidentes e consequentemente o determinante***

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{118}$$

    entretanto, observe que esta condição, do segundo determinante se anular, é necessária e não suficiente. ***Se este determinante for nulo não é preciso que*** $P = Q$, ***podem ser dois pontos distintos sobre uma reta que passe na origem. Se o determinante for zero então as coordenadas de*** P, Q ***são proporcionais e a iguadade*** $P = Q$ ***é um caso particular de proporcionalidade. Neste caso se costuma dizer que o sistema é*** interderminado ***porque tem uma infinidade de soluções: todos os pontos da reta.***

  - ***passam em pontos diferentes*** $P \neq Q$, ***sendo paralelas, determinam um plano, ou ainda, são coplanares, mas a interseção é vazia, na*** geometria euclidiana.

- ***têm direções distintas*** ***então***

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{119}$$

  - ***sendo coplanares, quer dizer que o problema é bidimensional, serão concorrentes.***
  - ***não sendo coplanares, o que somente é possível se a dimensão for maior ou igual a três, serão*** reversas ***e isto quer dizer elas não determinam um plano, ou ainda, estão em planos diferentes, é o significado do predicativo*** "reversas".

Como fazer:

Resolva o sistema de equações vetoriais, Observe que usei parâmetros diferentes para o* tempo*, para cada reta, porque os* momentos no tempo*,* s, t*, em que ponto se encontrar sob uma reta são independentes entre as retas, ou ainda, os pontos podem* deslisar *sobre as retas com* velocidades diferentes*, então preciso de dois parâmetros diferentes para descrever o "*movimento*" em cada uma das retas.

$$P + t\vec{u} = Q + s\vec{v}; \tag{120}$$

$$\begin{cases} p_1 - q_1 = tu_1 + sv_1; \\ p_2 - q_2 = tu_2 + sv_2; \end{cases} \tag{121}$$

$$\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 - q_1 \\ p_2 - q_2 \end{pmatrix}; \tag{122}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \Delta_s = \begin{vmatrix} p_1 - q_1 & v_1 \\ p_2 - q_2 & v_2 \end{vmatrix} \Delta_t = \begin{vmatrix} u_1 & p_1 - q_1 \\ u_2 & p_2 - q_2 \end{vmatrix}; \tag{123}$$

$$s = \frac{\Delta_s}{\Delta};\ t = \frac{\Delta_t}{\Delta}; \tag{124}$$

se for possível, quer dizer, se as duas ultimas equações, (123) e (124) produzirem um único valor para o par (s, t)***.***

Se $\Delta \neq 0$ ***o sistema é possível, com solução única dada pela equação (124) onde estão explicitados os valores de*** s, t ***que devem ser substituidos na equação (121) ou na equação (122).***

Se $\Delta = 0$ ***então os vetores*** $\vec{u}, \vec{v}$ ***representam a mesma direção e as retas são:***

- ***paralelas e diferentes sistema impossível, solução impossível, quando os pontos*** P ***e*** Q ***forem diferentes.***
- ***paralelas e coincidentes sistema indeterminado quando*** $P = Q$***, quando dizemos que o sistema é indeterminado porque tem uma infinidade de soluções: todos os pontos da reta.***

Exemplo 1 (Equação vetorial) *da reta*

(a)

$$\vec{P} = \vec{Q} = (3,4); \vec{u} = \vec{v} = (-1,2); \tag{125}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{cases} \tag{126}$$

$$\begin{cases} x = 3 + t(-1) = 3 - t; \\ y = 4 + t(2) = 4 + 2t; \\ x = 3 + t(-1) = 3 - s; \\ y = 4 + t(2) = 4 + 2s; \end{cases} \tag{127}$$

as equações são iguais, as quatro funções

$$x(t), y(t), x(s), y(s);$$

são idênticas duas a duas, as retas são coincidentes. O sistema é indeterminado, qualquer ponto da reta é solução.

(b)

$$\vec{P} = \vec{Q} = (3,4); \vec{u} = (-1,2); \vec{v} = (1,2); \tag{128}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{cases} \tag{129}$$

$$\begin{cases} x = 3 + t(-1) = 3 - t; \\ y = 4 + t(2); = 4 + 2t; \\ x = 3 + t(1); = 3 + s; \\ y = 4 + t(2) = 4 + 2s; \end{cases} \tag{130}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t = x = 3 + s; \\ y = 4 + 2t = y = 4 + 2s; \end{cases} \tag{131}$$

$$\begin{cases} 3 - t = 3 + s; \\ 4 + 2t = 4 + 2s; \end{cases} \tag{132}$$

$$-t = s; \;\Rightarrow\; 4 + 2t = 4 - 2t; \;\Rightarrow\; t = 0; \tag{133}$$

$$3 - t = 3 + s; \;\Rightarrow\; 3 = 3 + s; \;\Rightarrow\; s = 0; \tag{134}$$

$$(x,y) = (3,4); \tag{135}$$

As retas são concorrentes no ponto $\vec{P} = \vec{Q} = (3,4)$ ***que é a única solução do sistema que é chamado de*** **determinado*.***

(c)

$$\vec{P} = (3,4); \vec{Q} = (6,8); \vec{u} = (-1,2); \vec{v} = (1,2); \tag{136}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{cases} \tag{137}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t; \\ y = 4 + 2t; \\ x = 6 + s; \\ y = 8 + 2s; \end{cases} \tag{138}$$

$$\begin{cases} x = 3 - t = 6 + s; \ \Rightarrow \ s + t = -3; \\ y = 4 + 2t = 8 + 2s \ \Rightarrow \ 2(s-t) = -4; \ \Rightarrow \ s - t = -2; \\ 2s = -5 \ \Rightarrow \ s = -\frac{5}{2}; \\ s + t = -3 \ \Rightarrow \ t = -3 - s = -3 + \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}; \end{cases} \tag{139}$$

$$\begin{cases} x = 6 + s = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2} = 3 - t = 3.5 \\ y = 4 + 2t = 4 - 1 = 3 = 8 + 2s = 8 - \frac{10}{2} = 3; \\ M = (x,y) = (\frac{7}{2}, 3); \end{cases} \tag{140}$$

As retas são concorrentes no ponto $M = (\frac{7}{2}, 3)$***,*** $M \neq P$ ***e*** $M \neq Q$***. O sistema é determinado, tem solução única.***

(d) O sistema de equações abaixo expande as equações vetoriais que aparecem nas três primeiras equações, são duas retas que passam pelo mesmo ponto $P = (-3,-5)$***, uma delas tem a direção do vetor*** $\vec{u} =\overrightarrow{(3,2)}$ ***e a outra a direção do vetor*** $\vec{v} =\overrightarrow{(5,2)}$***. A solução do sistema tem que***

ser $P = (-3, -5)$***.***

$$\vec{u} = \overrightarrow{(3,2)}; \vec{v} = \overrightarrow{(5,2)}; \tag{141}$$

$$P = (-3, -5) = (p_1, p_2) = (q_1, q_2) = Q; \tag{142}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{cases} \tag{143}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t; \\ y = -5 + 2t; \\ x = -3 + 5s; \\ y = -5 + 2s; \end{cases} \tag{144}$$

$$\begin{cases} -3 + 3t = -3 + 5s \;\; \Rightarrow \;\; 3t - 5s = 0; t = \frac{5s}{3}; \\ -5 + 2t = -5 + 2s \;\; \Rightarrow \;\; 2t = 2s \;\; \Rightarrow \;\; t = s; \\ s = \frac{5s}{3} \;\; \Rightarrow \;\; s = 0; \;\; \Rightarrow \;\; t = 0; \\ s = t = 0 \;\; \Rightarrow \;\; (x, y) = (-3, -5); \end{cases} \tag{145}$$

<u>Conclusão:</u> as duas retas passam no ponto $P = (-3, 5)$***, como são concorrentes,*** $\Delta \neq 0$***, o sistema é determinado.***

(e) <u>duas retas paralelas no plano</u>, o sistema deve ser impossível: são duas retas que passam pelos pontos $P = (-3, -5)$ ***e*** $P = (-6, -10)$***, ambas têm a direção do vetor*** $\vec{u} = \overrightarrow{(3,2)}$***:***

$$\vec{u} = \overrightarrow{(3,2)} = \vec{v}; \tag{146}$$

$$P = (-3, -5) = (p_1, p_2); Q = (q_1, q_2) = (-6, -10); \tag{147}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \end{cases} \tag{148}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t; \\ y = -5 + 2t; \\ x = -6 + 3s; \\ y = -10 + 2s; \end{cases} \tag{149}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t = -6 + 3s; \;\Rightarrow\;\; 3s - 3t = 6 - 3 = 3; \\ y = -5 + 2t = -10 + 2s; \;\Rightarrow\;\; 2s - 2t = 10 - 5 = 5 \end{cases} \tag{150}$$

o sistema na equação (150) tem determinante zero, o sistema é impossível, as duas retas são paralelas e diferentes.

(f) <u>***Retas no espaço** $3D$*</u> ***Neste exemplo e no próximo, vou mostrar que temos condições de resolver um sistema de equações que represente duas retas no espaço, em dimensão finita qualquer. Essencialmente será um sistema equivalente à sua projeção em*** $3D$ ***que é por onde vou começar e depois apresentar um caso em*** $4D$ ***que será exatamente o que teremos em qualquer dimensão maior ou igual a 3. Vou manter a mesma notação dos exemplos anteriores.***

$$\begin{cases} \vec{u} = (3,2,1); \vec{v} = (5,2,4); \\ P = (p_1, p_2, p_3) = (-3,-5,5); \\ Q = (q_1, q_2, q_3) = (-3,-5,5); \end{cases} \tag{151}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ z = p_3 + tu_3; \\ x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \\ z = q_3 + tv_3; \end{cases} \begin{cases} x = -3 + 3t; \\ y = -5 + 2t; \\ z = 5 + t; \\ x = -3 + 5s; \\ y = -5 + 2s; \\ z = 5 + 4s; \end{cases} \tag{152}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 3t = -3 + 5s; \\ y = -5 + 2t = -5 + 2s; \\ z = 5 + t = 5 + 4s; \end{cases} ; \begin{cases} 5s - 3t = 0; \\ 2s - 2t = 0; \\ 4s - t = 0 \end{cases} \tag{153}$$

$$\begin{cases} 5s - 3t = 0; \\ s - t = 0; \\ s - t/4 = 0; \end{cases} \Rightarrow t = 0; s = 0; \tag{154}$$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (-3,-5,5) \\ s = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (-3,-5,5); \end{cases} \tag{155}$$

As retas são concorrentes no ponto $P = Q = (-3,-5,5)$***.***

(g) ***Considere os vetores*** $\vec{u} = (3,2,1), \vec{v} = (5,2,4)$ ***que dão direção às retas*** r_1, r_2***, e que estas passam nos pontos*** $P = (p_1, p_2, p_3) = (3,5,5)$ ***e*** $Q = (q_1, q_2, q_3) = (-8,-9,-7)$***, respectivamente.***

O gráfico destas retas feito com `gnuplot` ***mostra que elas são reversas o que vou agora provar com os cálculos que seguem.***

$$\begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{(3,2,1)}; \vec{v} = \overrightarrow{(5,2,4)}; \\ P = (p_1, p_2, p_3) = (3, 5, 5); \\ Q = (q_1, q_2, q_3) = (-8, -9, -7); \end{cases} \tag{156}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & \vec{u} & \\ & \vec{v} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -5; \tag{157}$$

$$\begin{cases} x = p_1 + tu_1; \\ y = p_2 + tu_2; \\ z = p_3 + tu_3; \end{cases} ; \begin{cases} x = q_1 + sv_1; \\ y = q_2 + sv_2; \\ z = q_3 + sv_3; \end{cases} \tag{158}$$

$$\begin{cases} x = 3 + 3t; \\ y = 5 + 2t; \\ z = 5 + t; \\ x = -8 + 5s; \\ y = -9 + 2s; \\ z = -7 + 4s; \end{cases} ; \begin{cases} 3 + 3t = -8 + 5s; \\ 5 + 2t = -9 + 2s; \\ 5 + t = -7 + 4s; \end{cases} \tag{159}$$

$$\begin{cases} 5s - 3t = 11; \\ 2s - 2t = 14; \\ 4s - t = 12; \end{cases} ; \begin{cases} 5s - 3t = 11; \\ s - t = 7; \\ s - t/4 = 3; \end{cases} \tag{160}$$

$$(-1 + \tfrac{1}{4})t = 4; \tfrac{-3}{4}t = 4; t = -\tfrac{16}{3}; \tag{161}$$

$$t = -\tfrac{16}{3} \ \Rightarrow \ s = 7 - \tfrac{16}{3} = \tfrac{5}{3}; \tag{162}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{16}{3} \ \Rightarrow \ (x, y, z) = (-13, \frac{-17}{3}, \frac{-1}{3}) \\ s = \frac{5}{3} \ \Rightarrow \ (x, y, z) = (-\frac{1}{3}, -\frac{17}{3}, -\frac{1}{3}); \end{cases} \tag{163}$$

Na equação (160) calculei o determinante contendo os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ nas linhas 2 e 3, isto equivale a calcular a área[2] do paralelogramo gerado por estes dois vetores. Se esta área for diferente de zero, como é o caso, os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são l.i., no caso de dois vetores significa que eles não

[2]Porque é o módulo do produto vetorial dos vetores.

são colineares, então as retas que eles determinam vão ser

- concorrentes, ***e o sistema de equações terá solução única, ou***
- reversas, ***e o sistema de equações será impossível.***

É possível calcular diretamente a distância entre as retas, para isto, vou determinar a equação de dois planos paralelos passando por P ***e por*** Q ***e contendo, respectivamente, as retas*** r_1, r_2 ***e ao*** normalizar ***as equações, o termo independente registra à distância do plano à origem e assim podemos calcular a distância entre os dois planos, e por consequência, entre as retas*** r_1, r_2***.***

A equação dum plano determinado por dois vetores é expressa pelo determinante

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ & \vec{u} & \\ & \vec{v} & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \tag{164}$$

$$6(x-3) - 7(y-5) - 4(z-5) = 0 \tag{165}$$

$$6x - 7y - 4z - 18 + 35 + 20 = 0 \tag{166}$$

$$6x - 7y - 4z + 37 = 0; R = \sqrt{6^2 + 7^2 + 4^2} \approx 10.0498 \tag{167}$$

$$\tfrac{6}{R}x - \tfrac{7}{R}y - \tfrac{4}{R}z + \tfrac{37}{R} = 0 \tag{168}$$

e um plano paralelo a este passando pelo ponto Q ***é dado pelo determinante***

$$\begin{vmatrix} x+8 & y+9 & z+7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \tag{169}$$

$$6(x+8) - 7(y+9) - 4(z+7) = 0 \tag{170}$$

$$6x - 7y - 4z + 48 - 63 - 28 = 0 \tag{171}$$

$$6x - 7y - 4z - 43 = 0; R = \sqrt{6^2 + 7^2 + 4^2} \approx 10.0498 \tag{172}$$

$$\tfrac{6}{R}x - \tfrac{7}{R}y - \tfrac{4}{R}z - \tfrac{43}{R} = 0 \tag{173}$$

de onde se conclui que os planos se encontram em diferentes semi-espaços relativamente ao plano que passa

na origem e lhes é paralelo então a distância entre os planos que contêm as retas r_1 ***e*** r_2 ***é***

$$|D_1 - D_2| = |\frac{37}{R} + \frac{43}{R}| = \frac{80}{R} \approx 7.96029752167991308532;$$

Sistema impossível, as retas são reversas.

O gráfico destas retas, feito com `gnuplot`***, mostra que elas são*** reversas***, com interseção vazia.***

Distância entre duas retas r_1, r_2 ***expressas usando a equação vetorial pode ser obtida com o seguinte algoritmo:***

(a) converta os vetores $\vec{u}, \vec{v}$ ***em unitários;***

(b) O determinante,

$$\begin{vmatrix} x - p_1 & y - p_2 & z - p_3 \\ & \vec{u} & \\ & \vec{v} & \end{vmatrix} \tag{174}$$

usando os vetores já convertidos a unitários, produz a equação normal do plano e nesta, o termo independente mede a distância do plano à origem.

(c) Escreva as equações dos planos contendo as duas retas, e para isto use os pontos por estas retas passam, P, Q ***no determinante, é o que aparece na primeira linha:***

$$x - p_1 \; y - p_2 \; z - p_3$$

com as coordenadas do ponto $P = (p_1, p_2, p_3)$ ***e tenha cuidado na "sintaxe":*** $x - p_1, \ldots$ ***.***

A diferença entre as equações tomada em módulo é a distância entre os planos e por consequência, entre as retas.

$$\begin{cases} r_1 : P = t\vec{u}; \\ r_1 : Q = t\vec{v}; \end{cases} \tag{175}$$

em que P, Q são dois pontos por onde passam, respectivamente, r_1, r_2 cujas direções são dadas, respectivamente, por $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Confira a equação **vetorial da reta.**

Mesmo que sejam duas retas num espaço de dimensão maior do que três, o problema se reduz ao caso de dimensão três: duas retas, qualquer que seja a posição relativa delas, ocupam no máximo um espaço de dimensão três:

- ***Se forem concorrentes ou paralelas e diferentes, determinam um plano, logo dimensão dois.***
- ***se forem reversas determinam um espaço de dimensão três.***

O cálculo da distância:

- ***Se forem*** **concorrentes** ***a distância entre elas é zero, elas têm um ponto em comum e a distância é o mínimo entre os possíveis valores $d(X, Y)$ em que X e Y representam pontos arbitrários sobre as retas, então o mínimo ocorre na interseção onde vale zero.***
- ***Se forem*** **paralelas** ***a distância entre elas é dada pelo comprimento dum segmento de reta perpendicular obtido com dois pontos sobre cada uma das retas.***

  Algoritmo para obtenção da distância:

  - ***fixe um ponto P sobre a primeira reta e Q sobre a segunda reta;***
  - ***calcule o vetor diferença $P - Q$;***
  - ***Seja $\vec{u}$ a direção comum às retas, calcule o unitário desta direção e siga chamando-o de $\vec{u}$.***
  - ***A distância entre as retas será o módulo do produto vetorial***

    $$|(P - Q) \times \vec{u}| = |P - Q||\vec{u}|\sin(\alpha) = |P - Q|\sin(\alpha) = h \quad (176)$$

    que mede a altura do losângulo de lados paralelos aos vetores $P - Q$, $\vec{u}$ e portanto a distância entre as

duas retas paralelas. Confira a figura (fig 6), página 39,

- ***Se forem*** reversas ***então existem dois planos paralelos cada um deles contendo uma destas retas e a distância entre as retas é a distância entre os dois planos, e o produto vetorial dos vetores $\vec{u}, \vec{v}$ nos dá um vetor perpendicular a ambos e ao plano que eles determinam que é paralela aos dois planos mencionados acima. Este método foi desenvolvido acima, implícitamente, usando determinante. Ele produz a equação cartesiana do plano que deve ser normalizada para que o termo independente indique a distância do plano à origem.***

  A equação cartesiana dum plano espaço $3D$ é

$$Ax + By + Cz - D = 0$$

em que $(A, \overrightarrow{B}, C)$ é produto vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ com D_1, D_1 duas constantes relativas às retas r_1, r_1 que surgem "automaticamente" quando se seleciona P ou Q na primeira linha do determinante.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 6i - 7j - 4k \tag{177}$$

$$(A, B, C) = (6, -7, -4); 6x - 7y - 4z + D = 0 \tag{178}$$

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \textbf{\textit{ constante de normalização}}; \tag{179}$$

$$R = \sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = 10.04987562112089027022; \tag{180}$$

$$(3, 5, 5) \in r_1 : 6 * 3 - 7 * 5 - 4 * 5 = -D_1 = -37 \tag{181}$$

$$6x - 7y - 4z + D_1 = 0 \ \Rightarrow \ |\tfrac{D_1}{R}| = \tfrac{37}{R}; \tag{182}$$

$$(-8, -9, -7) \in r_2 : -8 * 3 - 9 * 5 - 7 * 5 = -D_2 = -104 \tag{183}$$

$$6x - 7y - 4z + D_2 = 0 \ \Rightarrow \ |\tfrac{D_2}{R}| = \tfrac{104}{R}; \tag{184}$$

$$d(r_1, r_2) = \tfrac{104-37}{R} \tag{185}$$

Como as constantes relativas às retas r_1, r_2 têm mesmo sinal, isto significa que os planos que contêm estas retas se encontram no mesmo semi-espaço então a distância

entre as retas é o módulo da diferença entre os dois valores de D. A distância será sempre o módulo

$$|\frac{D_2 - D_1}{R}|$$

em que R é a constante para normalizar a equação cartesiana.

---

10. **geometria plana, bissetrizes num triângulo qualquer**

As três bissetrizes dum triângulo qualquer concorrem no mesmo ponto P que é o centro de massa do triângulo,confira a figura (fig 9), página 41,

(a) **(V)[ ](F)[ ] Para qualquer triângulo no plano, existe um triângulo que lhe é equivalente inscrito no círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$.**

(b) **(V)[ ](F)[ ] Como para qualquer triângulo no plano, existe um triângulo que lhe é equivalente inscrito no círculo trigonométrico basta demonstrar a *afirmação do caput* da questão para um triângulo qualquer inscrito no círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$.**

(c) **(V)[ ](F)[ ] Se $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$ então $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ determinam um triângulo inscrito no círculo trigonométrico $\mathbf{S}^1$.**

(d) **(V)[ ](F)[ ] As equação das mediatrizes no triângulo determinado pelos pontos $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ são**

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) + t(\cos(\beta) + \cos(\gamma), \sin(\beta) + \sin(\gamma)); \quad (186)$$
$$(\cos(\beta), \sin(\beta)) + t(\cos(\alpha) + \cos(\gamma), \sin(\alpha) + \sin(\gamma)); \quad (187)$$
$$(\cos(\gamma), \sin(\gamma)) + t(\cos(\alpha) + \cos(\beta), \sin(\alpha) + \sin(\beta)); \quad (188)$$
$$t \in \mathbf{R}; \quad (189)$$

e o cálculo da interseção destas retas, duas a duas é

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha) + t(\cos(\beta) + \cos(\gamma)) \\ y = \sin(\alpha) + t(\sin(\beta) + \sin(\gamma)) \\ x = \cos(\gamma) + s(\cos(\alpha) + \cos(\beta)) \\ y = \sin(\gamma) + s(\sin(\alpha) + \sin(\beta)) \end{cases} \tag{190}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) + t(\cos(\beta) + \cos(\gamma)) = \cos(\gamma) + s(\cos(\alpha) + \cos(\beta)) \\ \sin(\alpha) + t(\sin(\beta) + \sin(\gamma)) = \sin(\gamma) + s(\sin(\alpha) + \sin(\beta)); \end{cases} \tag{191}$$

(e) **(V)[ ](F)[ ] O centro de massa do triângulo determinado pelos pontos** $e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma}$ **é**

$$P = \left(\frac{\cos(\alpha) + \cos(\beta) + \cos(\gamma)}{3}, \frac{\sin(\alpha) + \sin(\beta) + \sin(\gamma)}{3}\right) \tag{192}$$

É o chamado baricentro do triângulo.

Solução 3 ***Há um erro nesta solução como observo ao final.***

Para qualquer triângulo no plano, existe um triângulo inscrito no círculo trigonométrico que lhe é semelhante. Para encontrar o padrão a que corresponde um triângulo dado, selecione uma corda[3] ***no círculo trigonométrico:***

Classificação dos triângulos.

- ***aos triângulos retângulos correspondem à corda coincidindo com o diâmetro, e assim definindo dois vértices, que são pontos*** antípodas ***do círculo, ficando o terceiro em uma das semi-esferas em que o diâmetro divide o círculo trigonométrico. Como a cada seleção dum ponto numa das semi-esferas corresponde a um triângulo retângulo equivalente pela seleção dum ponto na outra semi-esfera, então podemos restringir todas as classes de triângulos retângulos aos que pudermos obter selecionando o terceiro ponto em apenas uma das semi-esferas. Isto vai permitir um sistema de equivalências mais simples que volto a descrever no final.***
- ***aos acutângulos correspondem à corda numa semi-esfera, determinando dois vértices, com o terceiro vêrtice na outra semi-esfera, desta forma o ângulo que se opõe à corda é menor do que*** $\frac{\pi}{2}$ ***sobrando a diferença para distribuir pelos dois outros ângulos, Portanto fixando uma semi-esfera para nela considerar a corda, o terceiro vértice estará na outra semi-esfera.***
- ***aos obtusângulos correspondem à corda numa semi-esfera, determinando dois vértices, com o terceiro vértice na mesma semi-esfera. O ângulo que corresponde à corda mencionada mede mais do que*** $\frac{\pi}{2}$***.***
- ***Do exposto nos itens anteriores, se vê que é preciso uma notação para obter uma classificação mais simples e mais efetiva uma vez que a cada triângulo no plano***

[3]Existe uma infinidade de triângulos semelhantes em $\mathbf{S}^1$ porque é possível escolher a corda de muitas maneiras.

correspondem múltiplos triângulos que lhe são semelhantes inscritos no círculo trigonometrico. Ao escolhermos um diâmetro para S^1 *o dividiremos em duas semi-esferas que vou chamar de* N *e de* S*, sugerido pelos polos* norte e sul*, sem que o diâmetro pertença a nenhuma das semi-esferas. Temos assim duas semi-esferas abertas. Vou chamar, na continuação, este diâmetro escolhido de* "equador" *para continuar com a notação geográfica.*

(a) *retângulos* *Para obter o representante de qualquer* triângulo retângulo do plano*, tomamos o* equador *como corda e o terceiro vértice na semi-esfera* S*. Para garantir que encontramos o representante do* triângulo do plano*, agora é preciso usar algum dos métodos de semelhança de triângulos, basta garantir que um dos ângulos agudos do triângulo no plano coincida com um dos ângulos agudos do triângulo inscrito e para isto basta tomar uma paralela a um dos catetos passando por um dos vértices da corda, então a reta que passar pelo ponto em que esta reta intercepta* S *e pelo outro vêrtice da corda determinará o terceiro lado do triângulo retângulo.* método: lado, ângulo, lado

   Aqui existe um problema, digamos, epistemológico, *o triângulo do plano, cuja representação estamos querendo encontrar em* S^1*, e neste caso um triângulo retângulo, pode não ter a hipotenusa paralela ao equador, mas para isto, basta redesenhar* S^1 *e selecionar o equador paralelamente à hipotenusa. Este problema vai se repetir nos demais casos sem que eu me sinta obrigado a discutí-lo novamente. Esta questão também mostra a fragilidade de nossa comunicação oral ou escrita cuja solução passsaria por uma linguagem extremamente sofisticada e difícil, e é melhor encontrar um meio termo entre o bourbaquismo e a imprecisão...*

(b) *acutângulos* *Para obter o representante de qualquer* triângulo acutângulo*, selecione a corda, na semi-*

esfera N, paralela a um dos lados do triângulo, assim como também ao equador*. Ao obter uma paralela a outro lado do triângulo, passando por um dos pontos em que a corda intercepta a semi-esfera N será preciso ajustar a posição da corda para que a paralela ao terceiro lado intercepte* $\mathbf{S}^1$ *sobre os pontos já determinados pela corda e pela outra reta.* método: ângulo, ângulo, ângulo*. Confira a figura 8, página 41*

(c) obtusângulos *Para obter o representante de qualquer triângulo obtusângulo, selecionamos a corda na semi-esfera S, paralela ao lado maior do triângulo seguindo-se depois pelo método descrito para triângulos acutângulos para obter os dois outros vértices na semi-esfera S.* método: ângulo, ângulo, ângulo*.*

Nestas condições para demonstrar que as bissetrizes num triângulo qualquer se encontram num mesmo ponto equidistante dos lados, basta fazê-lo para um triângulo qualquer inscrito no círculo trigonométrico.

$\mathbf{S}^1$, *sejam então três pontos*

$$e^{i\alpha}, e^{i\beta}, e^{i\gamma} \in \mathbf{S}^1; |\alpha - \gamma| + |\gamma - \beta| + |\beta - \alpha| = 2\pi$$

determinando um triângulo, confira a figura (fig 9), página 41, As mediatrizes são geradas pelos vetores

$$r_1 : e^{i\alpha} + t\left(e^{i\gamma} - e^{i\alpha} + e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right) \quad (193)$$

$$r_2 : e^{i\beta} + t\left(e^{i\gamma} - e^{i\beta} + e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right) \quad (194)$$

$$r_3 : e^{i\gamma} + t\left(e^{i\alpha} - e^{i\gamma)} + e^{i\beta} - e^{i\gamma)}\right) \quad (195)$$

Calculando as interseções destas retas, duas a duas, temos

$\underline{r_1 \cap r_2}$

$$\begin{cases} e^{i\alpha} + t\left(e^{i\gamma} - e^{i\alpha} + e^{i\beta} - e^{i\alpha}\right) \\ e^{i\beta} + t\left(e^{i\gamma} - e^{i\beta} + e^{i\alpha} - e^{i\beta}\right) \end{cases} \tag{196}$$

$$\begin{cases} x = \cos(\alpha) + t(\cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha)); \\ y = \sin(\alpha) + t(\sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha)); \\ x = \cos(\beta) + s(\cos(\gamma) + \cos(\alpha) - 2\cos(\beta)); \\ y = \sin(\beta) + s(\sin(\gamma) + \sin(\alpha) - 2\sin(\beta)); \end{cases} \tag{197}$$

$$\begin{cases} \cos(\alpha) + t(\cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha)) = x = \\ = \cos(\beta) + s(\cos(\gamma) + \cos(\alpha) - 2\cos(\beta)); \\ \sin(\alpha) + t(\sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha)) = y = \\ = \sin(\beta) + s(\sin(\gamma) + \sin(\alpha) - 2\sin(\beta)); \end{cases} \tag{198}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha) & -(\cos(\gamma) + \cos(\alpha) - 2\cos(\beta)) \\ \sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha) & -(\sin(\gamma) + \sin(\alpha) - 2\sin(\beta)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \tag{199}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\beta) - \cos(\alpha) \\ \sin(\beta) - \sin(\alpha) \end{pmatrix} \tag{200}$$

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha) & -(\cos(\gamma) + \cos(\alpha) - 2\cos(\beta)) \\ \sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha) & -(\sin(\gamma) + \sin(\alpha) - 2\sin(\beta)) \end{pmatrix}; \tag{201}$$

$$\det(\mathcal{M}) = \Delta = -(3\sin(\gamma - \beta) + 3\sin(\beta - \alpha) + 3\sin(\alpha - \gamma)); \tag{202}$$

$$\Delta_t = \begin{vmatrix} \cos(\beta) - \cos(\alpha) & -(\cos(\gamma) + \cos(\alpha) - 2\cos(\beta)) \\ \sin(\beta) - \sin(\alpha) & -(\sin(\gamma) + \sin(\alpha) - 2\sin(\beta)) \end{vmatrix} \tag{203}$$

$$\Delta_t = \sin(\gamma - \beta) + \sin(\beta - \alpha) + \sin(\alpha - \gamma); \tag{204}$$

$$\Delta_s = \begin{vmatrix} \cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha) & \cos(\beta) - \cos(\alpha) \\ \sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha) & \sin(\beta) - \sin(\alpha) \end{vmatrix} \tag{205}$$

$$\Delta_s = -(\sin(\beta - \gamma) + \sin(\gamma - \alpha) + \sin(\alpha - \beta)) = \Delta_t; \tag{206}$$

$$t = \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{\cos(\beta) - \cos(\alpha) + 2(\cos(\beta) - \cos(\alpha))} \tag{207}$$

$$t = \frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{3(\cos(\beta) - \cos(\alpha))} \tag{208}$$

$$t = \frac{1}{3}; \tag{209}$$

$$s = \frac{\sin(\beta) - \sin(\alpha)}{\sin(\beta) - 2\sin(\alpha) - \sin(\alpha) + 2\sin(\beta)}; \tag{210}$$

$$s = \frac{\sin(\beta) - \sin(\alpha)}{3(\sin(\beta) - \sin(\alpha))}; \tag{211}$$

$$s = \frac{1}{3}; \tag{212}$$

$$x = \cos(\alpha) + t(\cos(\gamma) + \cos(\beta) - 2\cos(\alpha)); \tag{213}$$

$$x = \frac{\cos(\alpha) + \cos(\gamma) + \cos(\beta)}{3}; \tag{214}$$

$$y = \sin(\alpha) + t(\sin(\gamma) + \sin(\beta) - 2\sin(\alpha)); \tag{215}$$

$$y = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\gamma) + \sin(\beta)}{3}; \tag{216}$$

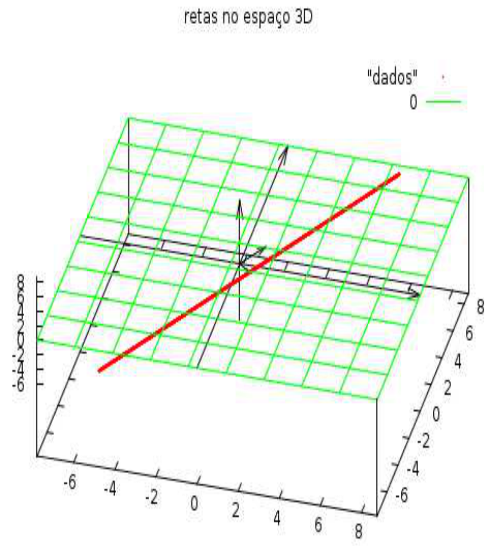
É desnecessário calcular $\underline{r_2 \cap r_3}$ e $\underline{r_3 \cap r_1}$ pela evidente simetria.

Havia um erro nas contas e agradeço a Edgard Venant pela amabilidade de tê-las verificado encontrando um erro de sinal no cálculo de Δ_s originado na substituição da segunda coluna na matriz $\mathcal{M}$.

```
Com \texttt{scilab}:
alpha = pi; beta = 7*pi/4; gamma = 2*pi;
Delta = [cos(gamma-alpha)+cos(beta-alpha),
-(cos(gamma-beta)+cos(alpha-beta));sin(gamma-alpha)+sin(beta-alpha),-(sin(gamma-bet
b=[cos(beta)-cos(alpha); sin(beta)-sin(alpha)]
linsolve(Delta,b);
```

Referências

[1] the free enciclopedia in the Internet Wikipedia. Wikipedia, the free enciclopedia in the internet. http://www.wikipedia.org.



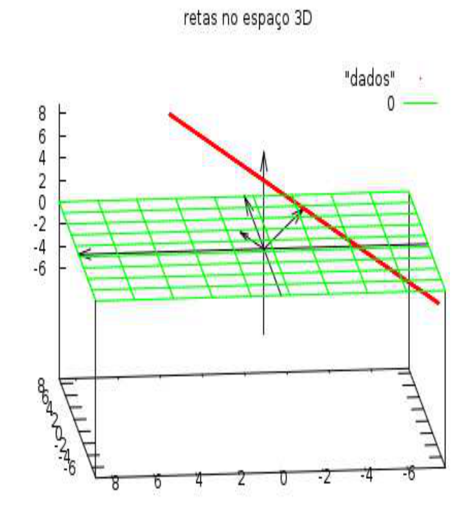


Figura 3: retas no espaço 3D

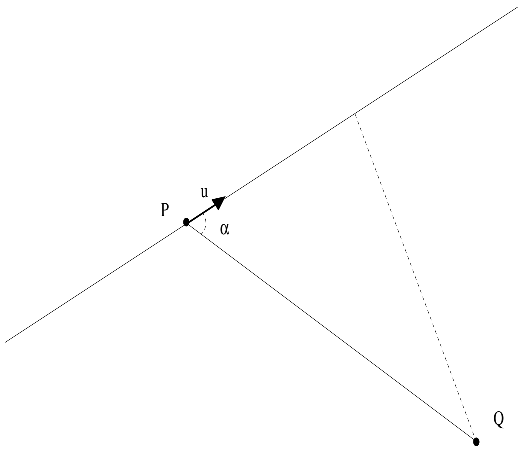


Figura 4: $\vec{u} \times \overrightarrow{Q - P} = d(Q, r)$

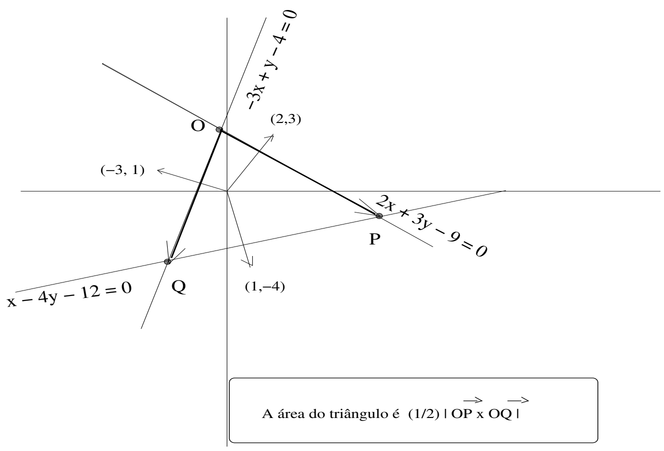


Figura 5: Triângulo determinado por três retas

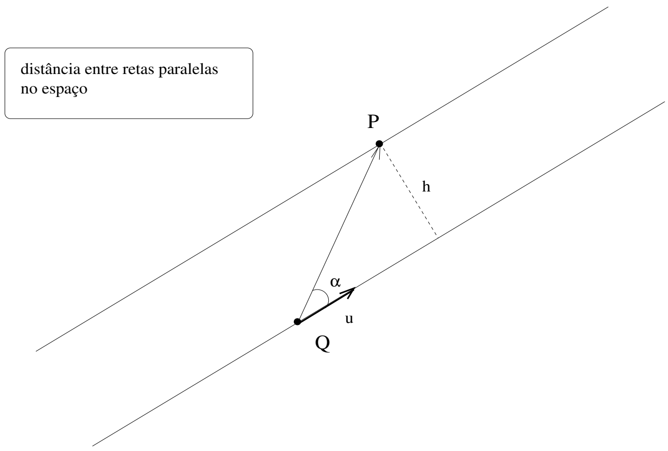


Figura 6: distância entre retas paralelas

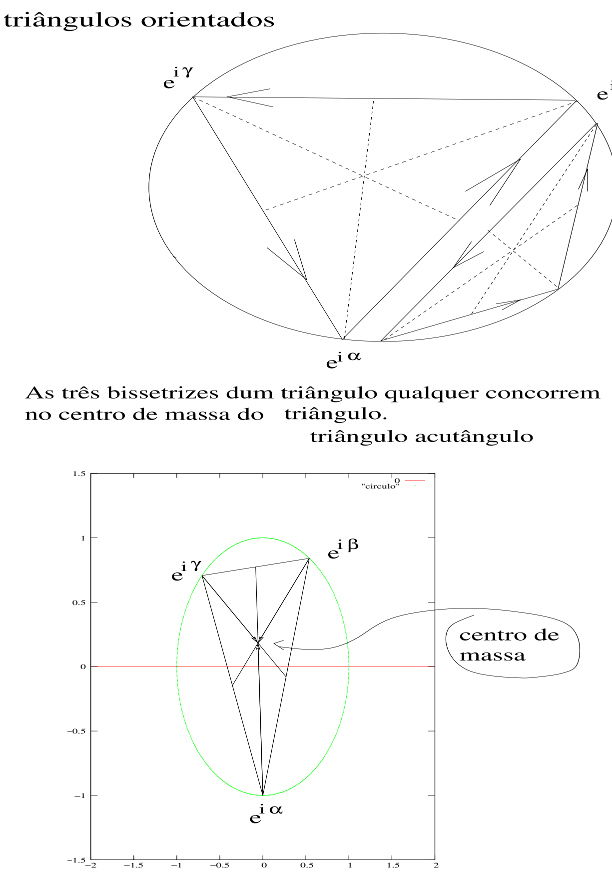


Figura 7: Ponto de encontro das bissetrizes

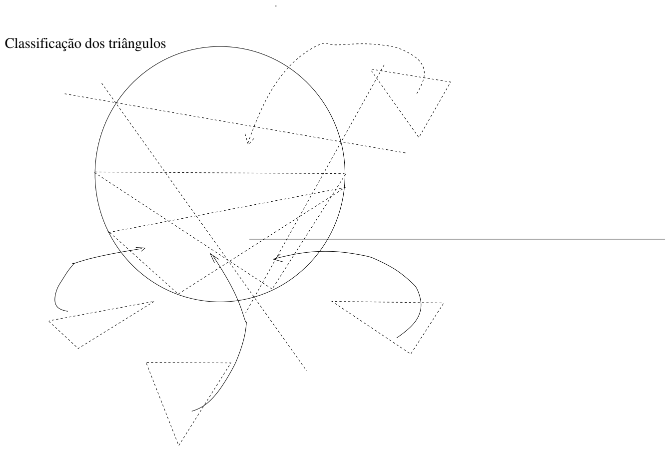


Figura 8: Representante dum triângulo em $\mathbf{S}^1$

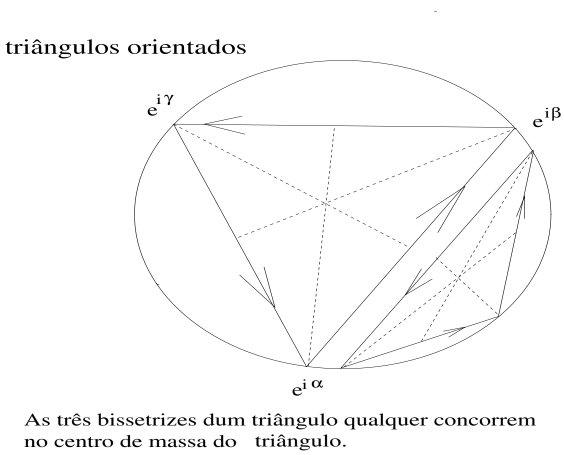


Figura 9: Ponto de encontro das bissetrizes em $\mathbf{S}^1$